Signaux Aléatoires

Filtre de Wiener et filtrage non-linéaire

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) University of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA
jyt@n7.fr

Année $2023 - 2024$

Bibliographie

Quelques références

- A. Papoulis and S. U. Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- E. W. Kamen and J. K. Su, Introduction to Optimal Estimation, Springer, London, 1999.

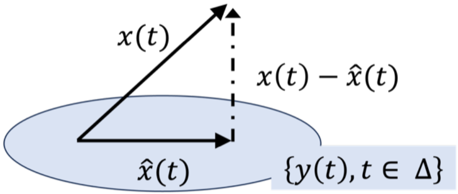
Filtre de Wiener

Problème

Débruitage de

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

où $x(t)$ est le signal d'intérêt supposé stationnaire de DSP $s_x(f)$ et $b(t)$ est un bruit stationnaire de DSP $s_b(f)$.



Filtre de Wiener

- Équations normales

$$E\left\{\left[x(t)-\widehat{x}(t)\right]y^*(u)\right\}=0 \quad \forall u \tag{1}$$

ou

$$E\left[x(t)x^*(u)\right]=E\left[\widehat{x}(t)y^*(u)\right] \quad \forall u$$

- Transmittance du filtre de Wiener

$$H(f)=\frac{s_x(f)}{s_y(f)}=\frac{s_x(f)}{s_x(f)+s_b(f)}$$

Analogie avec un "pont diviseur de tension".

Filtre de Wiener

Preuve

En remarquant que $\widehat{x}(t) = y(t) * h(t) = \int y(v)h(t-v)dv$, où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle recherchée, on obtient

$$E\left[\widehat{x}(t)y^*(u)\right] = \int h(t-v)R_y(v-u)dv = \int h(x)R_y(t-u-x)dx.$$

De plus

$$E\left[x(t)x^*(u)\right] = R_x(t-u).$$

Les équations normales (1) permettent alors d'obtenir

$$R_x(t-u) = \int h(x)R_y(t-u-x)dx, \quad \forall (t,u)$$

c'est-à-dire

$$R_x(\tau) = \int h(x)R_y(\tau - x)dx = h(\tau) * R_y(\tau) \quad \forall \tau$$

d'où

$$H(f) = \frac{s_x(f)}{s_y(f)} = \frac{s_x(f)}{s_x(f) + s_b(f)}$$

Filtre de Wiener

Erreur d'estimation

$$\sigma^2 = \int s_x(f)df - \int H(f)s_x(f)df = \int \frac{s_x(f)s_b(f)}{s_x(f)+s_b(f)}df$$

Remarques

- l'erreur est nulle lorsqu'il n'y a pas de bruit, i.e., $s_b(f) = 0$
- l'erreur est nulle lorsque les DSP du signal et du bruit ont des supports disjoints, i.e., $s_x(f)s_b(f) = 0$

Erreur d'estimation

Preuve

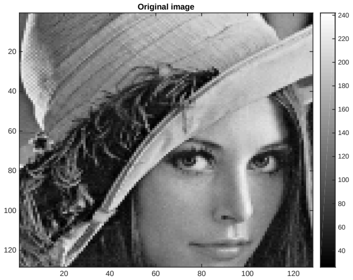
- Définition

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\left[|x(t)-\widehat{x}(t)|^2\right] \\ &= E\left\{[x(t)-\widehat{x}(t)]\,x^*(t)\right\} \\ &= R_x(0) - E\left[\widehat{x}(t)x^*(t)\right]\end{aligned}$$

- Second terme

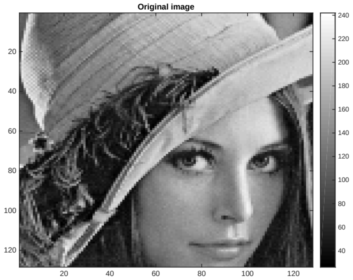
$$\begin{aligned}E\left[\widehat{x}(t)x^*(t)\right] &= \int h(t-u)E\left[x(u)x^*(t)\right]du + \int h(t-u)E\left[b(u)x^*(t)\right] \\ &= \int h(v)R_x^*(v)dv \\ &= \int H(f)s_x(f)df\end{aligned}$$

Lena


Original image
20
40
60
80
100
120
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40


Noisy image | SNR = 19.2188
20
40
60
80
100
120
250
200
150
100
50
0

Lena


Original image
20
40
60
80
100
120
20 40 60 80 100 120
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40


Denoised image | SNR = 22.5311
20
40
60
80
100
120
20 40 60 80 100 120
200
150
100
50

https://mortenhannemose.github.io/lena/

Filtrage non-linéaire

Problème

Comment déterminer la densité spectrale de puissance de

$$y(t) = g[x(t)]$$

lorsque $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de DSP $s_x(f)$, et $g(.)$ est une transformation non-linéaire sans mémoire ?

Exemples

- Quadrateur : $y(t) = x^2(t)$
- Non-linéarité cubique : $y(t) = x^3(t)$
- Non-linéarité exponentielle : $y(t) = \exp[x(t)]$
- ...

Filtrage non-linéaire

Théorème de Price

- Hypothèses
  (X_1, X_2) vecteur Gaussien de moyenne nulle, $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$
- Conclusion
  $$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right)$$

Application au quadrateur

Si on pose $X_1 = x(t)$ et $X_2 = x(t-\tau)$, on obtient

$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + C$$

Filtrage non-linéaire

Détermination de la constante C

- Rappel: moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E\left(X^{2n+1}\right) = 0,\ E\left(X^{2n}\right) = [(2n-1) \times (2n-3) ... \times 3 \times 1]\sigma^{2n}$$

- $\tau = 0$

$$E\left[y^2(t)\right] = E\left[x^4(t)\right] = 3R_x^2(0) = 2R_x^2(0) + C$$

- Conclusion

$$C = R_x^2(0)$$

Signal aléatoire Gaussien

Définition

On dit qu'un signal aléatoire $x(t)$ est gaussien si pour tout ensemble d'instants $(t_1, ..., t_n)$, le vecteur $[x(t_1), ..., x(t_n)]^T$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$.

- Loi univariée de $x(t)$

  La loi de $x(t)$ est alors une loi gaussienne de densité

$$p[x(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left\{-\frac{[x(t)-m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}.$$

  Si le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$m(t) = E[x(t)] = m, \text{ et } \sigma^2(t) = E[x^2(t)] - E^2[x(t)] = R_x(0) - m^2.$$

  donc les paramètres de la densité de $x(t)$ sont indépendants du temps.

Signal aléatoire Gaussien

- Loi bivariée de $[x(t), x(t-\tau)]$

  Pour un signal gaussien, la loi du vecteur $\boldsymbol{v}(t) = [x(t), x(t-\tau)]^T$ est une loi gaussienne de $\mathbb{R}^2$ de densité

$$p[x(t), x(t-\tau)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}(t)|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]\right\}$$

où $\boldsymbol{m}(t) = [m_1(t), m_2(t)]^T = (E[x(t)], E[x(t-\tau)])^T \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur moyenne et $\boldsymbol{\Sigma}(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de covariance définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t,\tau) & \sigma_{1,2}(t,\tau) \\ \sigma_{1,2}(\tau) & \sigma_2^2(t,\tau) \end{pmatrix}$$

où $\sigma_1^2(t,\tau)$ et $\sigma_2^2(t,\tau)$ sont les variances de $x(t)$ et de $x(t-\tau)$ et $\sigma_{1,2}(t,\tau)$ est la covariance $[x(t), x(t-\tau)]^T$. Si le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$\sigma_i(t,\tau) = R_x(0) - m^2 \text{ et } \sigma_{1,2}(t,\tau) = R_x(\tau) - m^2,$$

donc les paramètres de la densité de $\boldsymbol{V}(t)$ sont indépendants du temps.

Stationnarité de $y(t) = g[x(t)]$

Si $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire, alors pour toute non-linéarité g, $y(t)$ est également un signal aléatoire stationnaire. En effet

- Moyenne

$$E[y(t)] = E\left\{g[x(t)]\right\} = \int g[x(t)]p[x(t)]dx(t).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t)]$ ne dépendent que de $R_X(0)$ et de m, $E[Y(t)]$ est une quantité indépendante de t.

- Fonction d'autocorrélation

$$E\left[y(t)y(t-\tau)\right] = \int\int g[x(t)]g[x(t-\tau)]p[x(t), x(t-\tau)]dx(t)dx(t-\tau).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t), x(t-\tau)]$ ne dépendent que de $R_x(\tau)$, $R_x(0)$ et de m, $E[y(t)y(t-\tau)]$ est une quantité indépendante de t.

Le signal $y(t)$ est donc stationnaire au sens large. Sa moyenne dépend de $R_x(0)$ et de m et sa fonction d'autocorrélation dépend de $R_x(\tau)$, $R_x(0)$ et de m.

Que faut-il savoir ?

Filtrage de Wiener

- Utilité d'un filtre de Wiener
- Conditions d'utilisation d'un filtre de Wiener
- Expressions de la transmittance et de l'erreur d'estimation d'un filtre de Wiener
- Application du filtre de Wiener au débruitage d'images

Filtrage non-linéaire

- Utiliser le théorème de Price pour déterminer la fonction d'autocorrélation de $y(t) = g[x(t)]$, où g est une non-linéarité et $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.
- Savoir déterminer la constante issue du théorème de Price.