Signaux Aléatoires

Filtre de Kalman

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) University of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA
jyt@n7.fr

Année $2023 - 2024$

Bibliographie

Quelques références

- S. Haykin, Kalman Filtering and Neural Networks, John Wiley & Sons, 2001.
- E. W. Kamen and J. K. Su, Introduction to Optimal Estimation, Springer, London, 1999.

Filtre de Kalman

Modèle

- Équation d'état
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k$$
où $\boldsymbol{u}_k$ est un bruit blanc de matrice de covariance $E[\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^T] = \boldsymbol{Q}_k$.
- Équation d'observation
$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k$$
où $\boldsymbol{w}_k$ est un bruit blanc de matrice de covariance $E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^T] = \boldsymbol{R}_k$.
- État initial
$$\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$$

Problèmes

- Filtrage : estimation de $\boldsymbol{x}_k$ à partir de $\boldsymbol{z}_{1:k} = (z_1, ..., z_k)$
- Prédiction : estimation de $\boldsymbol{x}_k$ à partir de $\boldsymbol{z}_{1:l} = (z_1, ..., z_l)$ avec $k > l$
- Lissage: estimation de $\boldsymbol{x}_k$ à partir de $\boldsymbol{z}_{1:l} = (z_1, ..., z_l)$ avec $k < l$

Dans la suite, on se limite au problème de filtrage.

Filtre de Kalman

Estimateur MMSE

L'estimateur $\widehat{\boldsymbol{x}}_k$ qui minimise $E\left[\|\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k\|^2\right]$ est défini par :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = E\left[\boldsymbol{x}_k \,|\boldsymbol{z}_{1:k}\right]$$

Une propriété remarquable de cet estimateur est son écriture récursive qui définit les équations du filtre de Kalman discret. Cette écriture permet également de déterminer récursivement la variance de l'erreur de filtrage

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = E\left[\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\right)\left(\boldsymbol{x}_k - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\right)^T \middle| \boldsymbol{z}_{1:k}\right]$$

Filtre de Kalman

Algorithme

Prédiction à un pas

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}_k \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$$

Covariance de l'erreur de prédiction à un pas

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{P}_{k|k} \boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{Q}_k$$

Gain de Kalman

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}_{k+1|k} \boldsymbol{H}_{k+1}^T \left(\boldsymbol{H}_{k+1} \boldsymbol{P}_{k+1|k+1} \boldsymbol{H}_{k+1}^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}$$

Estimation de l'état à l'instant $k+1$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + \boldsymbol{K}_{k+1} \left(\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{H}_{k+1} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}\right)$$

Matrice de covariance de l'état à l'instant $k+1$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k+1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{k+1} \boldsymbol{H}_{k+1}\right) \boldsymbol{P}_{k+1|k}$$

Filtre de Kalman

Preuves

On rappelle qu'on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k \text{ (équation d'état)} \\ \boldsymbol{z}_k &= \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k \text{ (équation d'observation)} \end{aligned}$$

- Prédiction à un pas

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} &= E[\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{z}_{1:k}] \\ &= E[\boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{z}_{1:k}] \\ &= \boldsymbol{F}_k E[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{z}_{1:k}] \\ &= \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} \end{aligned}$$

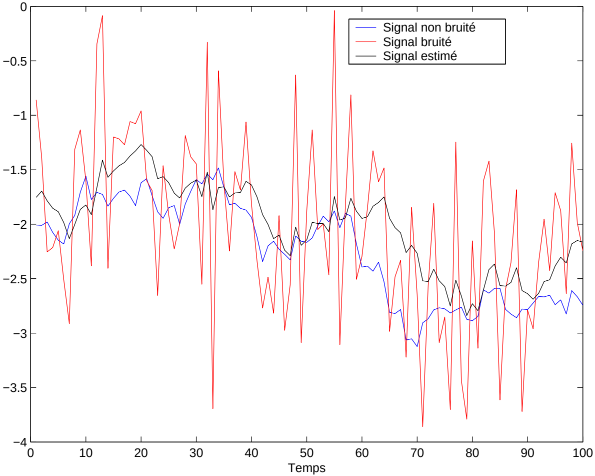
- Matrice de covariance de l'erreur de Prédiction à un pas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{k+1|k} &= E[(\boldsymbol{x}_{k+1} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k})(\boldsymbol{x}_{k+1} - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k})^T|\boldsymbol{z}_{1:k}] \\ &= E[(\boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})(\boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})^T|\boldsymbol{z}_{1:k}] \\ &= \boldsymbol{F}_k E[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})|\boldsymbol{z}_{1:k}]\boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{Q}_k \\ &= \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{P}_{k|k} \boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{Q}_k \end{aligned}$$

- ...

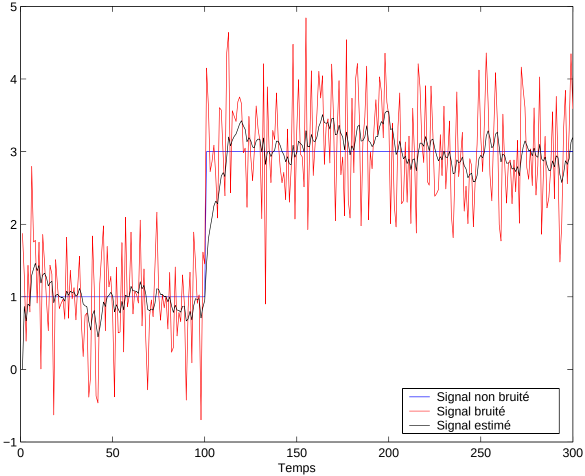
Exemple 1

Signal défini par les équations d'état et d'observation



Exemple 2

Signal avec rupture de modèle



Que faut-il savoir ?

- Signification des équations d'état et d'observation
- Signification du filtrage, de la prédiction et du lissage
- Principe d'une estimation récursive de l'état d'un sytème et de l'erreur d'estimation
- Les différentes étapes du filtre de Kalman