Processus Aléatoires

Exercices avec corrections

Auteurs :
Jean-Yves Tourneret, Toulouse INP
Corinne Mailhes, Toulouse INP

Références :
Département : EEEA
Année : 2A

Version 1.1 du
24 septembre 2023

Table des matières

1 TD1 : Corrélations et spectres

1.1 Exercice 1 : Etude du secteur

On modélise le courant électrique du secteur en prenant en compte que la fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$ et que sa phase n'est pas connue. Pour cela, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ, θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$.
Calculer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.
Le signal est-il stationnaire ? Ergodique (au premier ordre) ?

Sa moyenne est donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E_{f,\theta}[A_0 \cos(2\pi f t + \theta)] = E_f[E_\theta[A_0 \cos(2\pi f t + \theta) | f]] = E_f[0] = 0.$$

Sa fonction d'autocorrélation est définie par

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) =& E_f\left[E_\theta\left[A_0^2 \cos(2\pi f t + \theta)\cos(2\pi f(t-\tau) + \theta) | f\right]\right] \\
=& E_f\left[\frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f \tau)\right] = \frac{A_0^2}{2}\int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \cos(2\pi f \tau) \times \frac{1}{2\Delta f} df \\
=& \frac{A_0^2}{4\Delta f}\left[\frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau}\right]_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \\
=& \frac{A_0^2}{8\pi\tau\Delta f}\{\sin(2\pi(f_0+\Delta f)\tau) - \sin(2\pi(f_0-\Delta f)\tau)\} \\
=& \frac{A_0^2}{4\pi\tau\Delta f}\sin(2\pi\Delta f \tau)\cos(2\pi f_0 \tau) \\
=& \frac{A_0^2}{2}\text{sinc}(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0\tau). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Remarque : Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

Sa DSP est donnée par :

$$\begin{aligned}
s_X(f) =& TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{2}\frac{1}{2\Delta f}\Pi_{2\Delta f}(f) * \frac{1}{2}\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\} \\
=& \frac{A_0^2}{8\Delta f}[\Pi_{2\Delta f}(f-f_0) + \Pi_{2\Delta f}(f+f_0)]. \qquad (2)
\end{aligned}$$

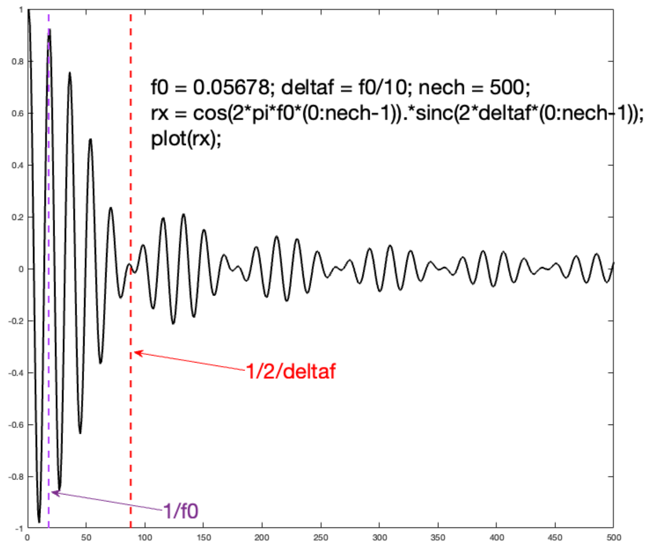


FIGURE 1 – Fonction d'autocorrélation

Pour déterminer si le signal $X(t)$ est ergodique au premier ordre, on calcule

$$\Delta S_X(0) = S_X(0^+) - S_X(0^-) \text{ avec } s_X(f) = \frac{dS_X(f)}{df}$$

En intégrant $s_X(f)$, on obtient $\Delta S_X(0) = 0 = m_X^2$, ce qui signifie que $X(t)$ est un signal ergodique (au premier ordre).

1.2 Exercice 2 : Extrait partiel 2019-2020

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = A \exp\left[j2\pi Bt\right]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, +1\}$, c'est-à-dire $P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$ et B est une variable aléatoire indépendante de A et de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. On rappelle qu'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ possède la densité

$$p(b) = \begin{cases} 1 \text{ si } b \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $x(t)$ est un signal stationnaire et déterminer la densité spectrale de puissance et la puissance du signal $x(t)$.

Comme les variables aléatoires A et B sont indépendantes, la moyenne du signal $x(t)$ est

$$E[x(t)] = E[A] \times E\left[\exp\left(j2\pi Bt\right)\right].$$

Mais $E[A] = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ d'où

$$E[x(t)] = 0.$$

La focntion d'autocorrélation de $x(t)$ est

$$\begin{aligned} E[x(t)x^*(t-\tau)] =& E[A^2] \times E\left[\exp(j2\pi B\tau)\right] \\ =& \int_0^1 \exp(j2\pi b\tau)db \\ =& \frac{e^{j2\pi\tau}-1}{j2\pi\tau}. \end{aligned}$$

Comme $E[x(t)]$ et $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ ne dépendent pas de t, le signal $x(t)$ est stationnaire (au second ordre). La densité spectrale de $x(t)$ est $s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)]$, i.e.,

$$s_x(f) = \text{TF}\left[e^{j\pi\tau}\frac{e^{j\pi\tau}-e^{-j\pi\tau}}{j2\pi\tau}\right] = \text{TF}\left[e^{j\pi\tau}\text{sinc}\pi\tau\right] = \Pi_1(f) * \delta\left(f-\frac{1}{2}\right) = \Pi_1\left(f-\frac{1}{2}\right).$$

La puissance du signal $x(t)$ est

$$P_x = R_x(0) = \int s_x(f)df = 1.$$

1.3 Exercice 3 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :

$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$. Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$. Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?

1. Le signal est aléatoire. Sa moyenne est donc donnée par $m_X = E\left[X(t)\right]$ et sa fonction d'autocorrélation par $R_X(\tau) = E\left[X(t)X^*(t-\tau)\right]$. Pour montrer qu'il est stationnaire il faut montrer que m_X et R_X sont indépendantes du temps. On a

$$m_X = E\left[X(t)\right] = E\left[A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] = E\left[A(t)\right] E\left[\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right]$$

car A et θ sont des variables aléatoires indépendantes. D'où

$$m_X = 0.$$

De même

$$\begin{aligned} R_X(\tau) =& E\left[A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right) A^*(t-\tau)\cos\left(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta\right)\right] \\ =& E\left[A(t)A^*(t-\tau)\right] E\left[\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\cos\left(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta\right)\right] \\ =& R_A(\tau) \times \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Le signal est donc stationnaire (au second ordre) car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps. Sa DSP est donnée par

$$s_X(f) = TF\left[R_X(\tau)\right] = S_A(f) * \frac{1}{4}\left\{\delta\left(f - f_0\right) + \delta\left(f + f_0\right)\right\} = \frac{1}{4}\left\{S_A\left(f - f_0\right) + S_A\left(f + f_0\right)\right\}$$

2. On a

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t)Y^*(t-\tau)\right] = E\left[X(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right) X^*(t-\tau)\cos\left(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta\right)\right].$$

Attention ici $X(t)$ et le cosinus ne sont pas indépendants car ils dépendent tous deux de θ. Mais

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) =& E\left[A(t)\cos^2\left(2\pi f_0 t + \theta\right) A^*(t-\tau)\cos^2\left(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta\right)\right] \\ =& R_A(\tau) \times E\left[\frac{1+\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)}{2}\frac{1+\cos\left(4\pi f_0 (t-\tau) + 2\theta\right)}{2}\right] \\ =& \frac{1}{4}R_A(\tau) E\left[1 + \cos\left(2\theta + ...\right) + \cos\left(2\theta + ...\right) + \frac{1}{2}\left\{\cos\left(4\pi f_0 \tau\right) + \cos\left(4\theta + ...\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4}R_A(\tau)\left\{1 + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 \tau\right)\right\}. \tag{5}$$

La densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} s_Y(f) =& TF\left[R_Y(\tau)\right] = \frac{1}{4}S_A(f) * \left\{\delta(f) + \frac{1}{4}\left\{\delta\left(f - 2f_0\right) + \delta\left(f + 2f_0\right)\right\}\right\} \\ =& \frac{1}{4}S_A(f) + \frac{1}{16}\left\{S_A\left(f - 2f_0\right) + S_A\left(f + 2f_0\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Il faudra utiliser un filtre passe-bas pour conserver uniquement la partie $\frac{1}{4}S_A(f)$ et couper la partie qui se trouve autour de $2f_0$

2 TD2 : Filtrage linéaire

2.1 Exercice 1 : Identification d'un filtre linéaire

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire de moyenne $E[x(t)] = 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$.

On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)du$$

1. Montrer que $y(t) = F_T[x(t)]$, où F_T est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle $h_T(t)$ et la transmittance $H_T(f)$ de ce filtre F_T.

2. Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$ notée $s_y(f)$ en fonction de $s_x(f)$. En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.

3. Dans le cas où $x(t)$ est un bruit blanc de puissance σ_x^2, donnez l'expression de la puissance du signal $y(t)$.

1. Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire,
   Méthode 1 : il suffit de déterminer la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ (qui correspond à la réponse harmonique du filtre pour $f = f_0$) et de vérifier qu'elle s'écrit $\exp(j2\pi ft)H(f)$, où $H(f)$ est une quantité indépendante de t qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification).
   Dans cet exercice, la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ est

   $$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \exp(j2\pi fu)du = \frac{1}{T}\frac{\exp(j2\pi ft)}{j2\pi f}\left[\exp(j2\pi fT) - 1\right] = \exp(j2\pi ft)H_T(f)$$

   avec

   $$H_T(f) = \frac{1}{j2\pi fT}\left[\exp(j2\pi fT - 1)\right].$$

   Donc $Y(t)$ est obtenu par filtrage de $X(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f)$ définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est $h_T(t) = \text{TF}^{-1}[H_T(f)]$. Pour déterminer cette transformée de Fourier inverse, on peut décomposer $H(f)$ comme suit

   $$H_T(f) = \exp(j\pi fT)\frac{\exp(j\pi fT) - \exp(-j\pi fT)}{j2\pi fT} = \exp(j\pi fT) \times \text{sinc}(\pi fT),$$

   d'où

   $$h_T(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) * \frac{1}{T}\Pi_T(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Méthode 2 : On peut aussi identifier la réponse impulsionnelle :

$$\text{Si } X(t) = \delta(t), Y(t) = h(t) = \frac{1}{T} \text{ si } t < 0 < t + T \text{ soit } -T < t < 0 \text{ et } = 0 \text{ ailleurs}$$

Ce qui permet d'identifier : $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T(t + \frac{T}{2})$. Mais il faut ensuite vérifier que l'opération de filtrage s'écrit bien comme une opération de convolution avec cette réponse impulsionnelle. Ainsi, pour tout $x(t)$, on a bien :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)du = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\Pi_T(t + \frac{T}{2} - u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du.$$

Et on calcule ensuite sa transmittance associée.

2. D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$\begin{aligned} s_y(f) =& s_x(f)|H_T(f)|^2 \\ =& s_x(f)\text{sinc}^2(\pi f T). \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}[s_x(f)\text{sinc}^2(\pi f T)] = R_x(\tau) * \frac{1}{T}\Lambda_T(\tau)$$

d'où

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int R_x(s)\Lambda_T(\tau - s)ds.$$

3. Dans le cas où $x(t)$ est un bruit blanc de puissance σ_x^2,

$$s_x(f) = \sigma_x^2 \text{ soit } R_x(\tau) = \sigma_x^2\delta(\tau)$$

La puissance de $y(t)$ se calcule de deux façons :
Méthode 1 :

$$P_Y = \int s_y(f)df = \int \sigma_x^2\text{sinc}^2(\pi f T)df = \frac{\sigma_x^2}{\pi T}\int \text{sinc}^2(u)du = \frac{\sigma_x^2}{\pi T}\pi = \frac{\sigma_x^2}{T}$$

Remarque : Si on ne connait pas $\int sinc^2(u)du = \pi$, on peut retrouver le résultat ci-dessus en regardant dans la table des TF la TF inverse de $sinc^2(\pi f T)$ car l'intégrale de $sinc^2(\pi f T)$ est égale à la valeur en 0 de sa TF inverse et donc égale à $1/T$. Ou alors, on peut aussi se rappeler de Parseval : $\int |H_T(f)|^2 df = \int |h(t)|^2 dt$.
Méthode 2 :

$$P_Y = R_y(0) = \frac{1}{T}\int \sigma_x^2\delta(s)\Lambda_T(-s)ds = \frac{1}{T}\int \sigma_x^2\delta(s)\Lambda_T(0)ds = \frac{\sigma_x^2}{T}$$

2.2 Exercice 2 : Filtrage adapté

On considère un signal déterministe à énergie finie $s(t)$ défini sur l'intervalle $[0, T]$ perturbé par un bruit $b(t)$ additif stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_b(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_b(f)$

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

On filtre le signal $x(t)$ à l'aide d'un fitre linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$ et on note $y(t) = x(t) * h(t)$ la sortie de ce filtre.

1. On note $y_s(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $s(t)$. Montrer que

$$y_s(t_0) = \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi f t_0} df$$

où $S(f)$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$. Déterminer $y_s(t_0)$ lorsque

$$s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Tracer $y_s(t_0)$ en fonction de t_0.

2. Soit $y_b(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $b(t)$. Montrer que la puissance du signal $y_b(t_0)$ s'écrit

$$E\left[y_b^2(t_0)\right] = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df$$

Déterminer cette puissance pour $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et pour le filtre de la question précédente.

3. On admet que le filtre qui maximise le rapport signal sur bruit à l'instant t_0 ($\text{SNR}(t_0) = y_s^2(t_0)/E\left[y_b^2(t_0)\right]$) est défini par

$$H_0(f) = k\frac{S^*(f)}{s_b(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$

où k est une constante. Dans le cas d'un bruit blanc défini par $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$, déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre notée $h_0(t)$ en fonction de k, N_0, t_0 et du signal $s(t)$. Tracer $h_0(t)$ dans le cas du signal $s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$.

1. Puisque $s(t)$ un signal à énergie finie, $y_s(t)$ est aussi à énergie finie et

$$Y_s(f) = TF\left[y_s(t)\right] = S(f)H(f)$$

Donc

$$\begin{aligned} y_s(t) &= TF^{-1}[S(f)H(f)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df \end{aligned}$$

En faisant $t = t_0$ dans cette égalité, on obtient le résultat demandé.
Lorsque $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$, on a

$$S(f) = AT \sin c\,(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}$$

De plus, si $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} I_{[0,T]}(t)$, on a

$$H(f) = \sqrt{T} \sin c\,(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}$$

d'où

$$y_s(t) = A\sqrt{T} \int_{\mathbb{R}} T \sin c^2\,(\pi T f)\, e^{j2\pi f(t-T)} df$$

Mais

$$\begin{aligned} TF^{-1}\left[T \sin c^2\,(\pi T f)\right] &= \Lambda_T\,(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} T \sin c^2\,(\pi T f)\, e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned}$$

Donc

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T\,(t_0 - T)$$

2. La relation de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_{y_b}(f) = |H(f)|^2\, s_b(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= E\left[y_b^2(t)\right] = R_{y_b}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_{y_b}(f)df \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2\, s_b(f)df \end{aligned}$$

Lorsque $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et pour le filtre de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2\, df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\, dt \text{ (égalité de Parseval)} \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

3. Dans le cas d'un bruit blanc défini par $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$, on a

$$H_0(f) = \frac{2k}{N_0} S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= TF^{-1}\left[H_0(f)\right] \\ &= \frac{2k}{N_0} TF^{-1}\left[S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}\right] \end{aligned}$$

La TF inverse de $S^*(f)$ est

$$TF^{-1}\left[S^*(f)\right] = s^*(-t)$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{2k}{N_0} s^*\left[-\left(t - t_0\right)\right] \\ &= \frac{2k}{N_0} s^*\left[t_0 - t\right] \end{aligned}$$

2.3 Exercice 3 : Filtrage de Wiener

Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être considérés comme ayant une densité spectrale de puissance en 1/f, e.g., les anomalies du niveau des océans mesurées en altimétrie satellitaire, le nombre de Wolf qui mesure l'activité solaire, les fluctuations de tension mesurées sur des résistances à film mince, le bruit modélisant l'instabilité des horloges satellitaires etc. La DSP de ces processus aléatoires est définie par :

$$s_X(f) = 1/|f|^{\alpha}.$$

Supposons qu'on observe un tel phénomène $X(t)$ et qu'il est noyé dans un bruit $B(t)$ additif blanc de puissance σ_B^2 :

$$Y(t) = X(t) + B(t)$$

1. Donner la transmittance du filtre de Wiener qui permettra de retrouver au mieux le signal $X(t)$ à partir des observations de $Y(t)$. Exprimer cette transmittance en fonction de α et σ_B^2.
2. Dans le cas où $\alpha = 2$, en déduire l'expression de la réponse impulsionnelle associée. Comment évolue le filtre en fonction de la puissance du bruit additif ?
3. Dans le cas où $\alpha = 2$, calculer la puissance de l'erreur d'estimation.

1. La transmittance du filtre de Wiener s'écrit :

$$H(f) = \frac{s_X(f)}{s_X(f) + s_B(f)} = \frac{1}{1 + \sigma_B^2 |f|^\alpha}$$

2. Dans le cas où $\alpha = 2$,

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sigma_B^2 |f|^2} = \frac{4\pi^2/\sigma_B^2}{4\pi^2/\sigma_B^2 + 4\pi^2 |f|^2}$$

   On pose $a^2 = 4\pi^2/\sigma_B^2$ et avec les tables de TF, on trouve

$$h(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t|} = \frac{\pi}{\sigma_B} e^{-\frac{2\pi}{\sigma_B}|t|}.$$

   La réponse impulsionnelle est une double exponentielle, dont la valeur en 0 diminue et "l'étalement" augmente quand le bruit augmente, ce qui signifie que le filtrage de Wiener utilisera une portion du signal plus importante pour pouvoir débruiter (normal, c'est plus difficile)

3. La puissance de l'erreur s'écrit :

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_X(f) s_B(f)}{s_X(f) + s_B(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_B^2}{1 + \sigma_B^2 |f|^2} df.$$

   En utilisant la similarité avec l'expression de $H(f)$, on obtient

$$\sigma_e^2 = \pi \sigma_B.$$

   La puissance de l'erreur d'estimation est une fonction de la racine carrée de la puissance du bruit.

3 TD3 : Filtrage non linéaire

3.1 Exercice 1 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp\left[X(t)\right].$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.

3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

Remarque : On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$ est :

$$m(u) = E\left[e^{Xu}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

1. On a

$$E[y(t)] = E\left\{\exp\left[x(t)\right]\right\} = m(1) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right).$$

2. La variance de $y(t)$ est

$$\begin{aligned} \text{var}[y(t)] =& E[y^2(t)] - E^2[y(t)] = E\left\{2\exp\left[x(t)\right]\right\} - E^2\left\{\exp\left[x(t)\right]\right\} \\ =& m(2) - m^2(1) = \exp(2\sigma^2) - \exp\left(\sigma^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

3. Nous avons vu en cours qu'un signal défini par une transformation non linéaire sans mémoire d'un signal aléatoire stationnaire reste stationnaire, plus précisément que $R_y(\tau)$ dépend uniquement de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$. L'application du théorème de Price conduit à

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] = E\left[y(t) \times y(t-\tau)\right] = R_y(\tau) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_y(\tau)} = \partial R_x(\tau).$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\ln|R_y(\tau)| = R_x(\tau) + C.$$

soit

$$R_y(\tau) = K\exp[R_x(\tau)].$$

Pour trouver K, on fait $\tau = 0$ et on obtient

$$R_y(0) = K\exp[R_x(0)] \;\Leftrightarrow K = \frac{R_y(0)}{\exp[R_x(0)]}.$$

Mais $R_y(0) = E[y^2(t)] = \exp(2\sigma^2) = \exp\left[2R_x(0)\right]$ donc

$$K = \exp\left[R_x(0)\right]$$

et donc

$$R_y(\tau) = \exp[R_x(\tau) + R_x(0)].$$

3.2 Exercice 2 : Filtrage non linéaire de type cubique

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = X^3(t)$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près.
2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire Z gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :

$$E\left[Z^{2n}\right] = (2n)!!\sigma^{2n} \text{ avec } (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1$$

En déduire le constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.

1. D'après le théorème de Price, on a

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] = E\left[3x^2(t)) \times 3x^2(t-\tau)\right] = 9R_{x^2}(\tau).$$

Mais on a vu en cours que la fonction d'autocorrélation du quadrateur est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$

Donc

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = 18R_x^2(\tau) + 9R_x^2(0).$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau) + C.$$

2. Si on fait $\tau = 0$ dans l'expression de $R_y(\tau)$, on obtient

$$R_y(0) = 6R_x^3(0) + 9R_x^3(0) + C.$$

d'où

$$C = E[x^6(t)] - 15R_x^3(0).$$

En utilisant le rappel, on en déduit

$$C = 15\sigma^6 - 15\sigma^6 = 0$$

et donc

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau).$$

3.3 Exercice 3 : Signe d'un processus aléatoire

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = \text{signe}[X(t)]$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près. On rappelle la primitive suivante
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \text{Arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + K$$
2. Déterminer la constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.

1. L'application du théorème de Price conduit à
$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] = 4E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\}.$$
Pour déterminer $R_y(\tau)$, il faut déterminer le second membre de cette équation, ce qui se fait comme suit
$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\} = \int\int \delta[x_1]\delta[x_2]p(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$
d'où
$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\} = \int\int \delta[x_1]\delta[x_2]p(0,0)dx_1dx_2 = p(0,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}.$$
On en conclut
$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{4}{2\pi\sqrt{R_x^2(0) - R_x^2(\tau)}}$$
qui s'intègre pour donner
$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right] + K.$$
2. La constante K s'obtient en faisant $\tau = 0$
$$K = R_y(0) - \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}(1) = R_y(0) - 1.$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = 1$$

d'où $K = 0$ et

$$\boxed{R_y(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]}.$$

4 TD4 : Estimation bayésienne

4.1 Exercice 1 : Temps moyen entre deux appels téléphoniques

Considérons un problème de trafic, par exemple l'arrivée d'appels téléphoniques sur un faisceau de lignes d'un central téléphonique. On peut admettre que pour un faisceau particulier, le nombre d'arrivée d'appels pendant l'unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta > 0$. On sait alors que sous cette hypothèse, la durée T séparant deux arrivées successives d'appels téléphoniques sur ce faisceau (avec l'unité de temps précédente) suit une loi exponentielle de paramètre θ soit :

$$f(t;\theta) = \theta e^{-\theta t} 1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On désire estimer le paramètre θ inconnu à l'aide de l'observation de n durées $t_i, i = 1, ..., n$ séparant des arrivées successives d'appels téléphoniques sur ce faisceau.

1. dans un premier temps, on suppose qu'aucune information a priori n'est disponible sur θ (à part $\theta > 0$ bien sûr). Déterminer à partir des observations t_i l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ noté $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$.
2. Il est connu que pour l'ensemble des faisceaux téléphoniques, le nombre moyen θ d'arrivées d'appels téléphoniques pendant l'unité de temps est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ connu :

$$g(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} 1_{\mathbb{R}^+}(\theta)$$

La densité $g(\theta)$ représente pour cet exemple la loi a priori sur le paramètre θ. Déterminer à partir des observations t_i les estimateurs de la moyenne a posteriori et du maximum a posteriori notés respectivement $\widehat{\theta}_{\text{MMSE}}$ et $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$.
3. Montrer que les estimateurs $\widehat{\theta}_{\text{MV}}$, $\widehat{\theta}_{\text{MMSE}}$ et $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ sont équivalents lorsque n est grand et interprèter ce résultat.

1. La densité de $(T_1, ..., T_n)$ est

$$f(t_1, ..., t_n; \theta) = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{k=1}^{n} t_i\right)$$

Maximiser la vraisemblance de $t_1, ..., t_n$ revient à maximiser son logarithme qui s'écrit

$$\ln f(t_1, ..., t_n; \theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{k=1}^{n} t_i$$

Mais

$$\frac{\partial \ln f(t_1, ..., t_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} t_i = 0$$

d'où

$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} T_i}$$

2. La loi a posteriori de θ s'écrit

$$\begin{aligned} f(\theta | t_1, ..., t_n) &\propto f(t_1, ..., t_n | \theta) f(\theta) \\ &\propto \theta^n \exp\left[-\theta\left(\lambda + \sum_{k=1}^{n} t_i\right)\right] \end{aligned}$$

qui est une loi gamma de paramètres $n+1$ et $\lambda + \sum_{k=1}^{n} t_i$, i.e.,

$$\theta | t_1, ..., t_n \sim \Gamma\left(n+1, \lambda + \sum_{k=1}^{n} t_i\right)$$

La moyenne de cette loi est

$$\widehat{\theta}_{\text{MMSE}} = E\left[\theta | T_1, ..., T_n\right] = \frac{n+1}{\lambda + \sum_{k=1}^{n} T_i}$$

tandis que son mode est

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{n}{\lambda + \sum_{k=1}^{n} T_i}$$

3. On remarque que

$$\widehat{\theta}_{\text{MMSE}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} T_i} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{n} T_i}}$$

et

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} T_i} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{n} T_i}}$$

Quand $n \to \infty$, on sait que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T_i \to E\left[T_i\right] = \frac{1}{\theta} \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} T_i \to \infty$$

Les estimateurs $\widehat{\theta}_{\text{MV}}, \widehat{\theta}_{\text{MMSE}}$ et $\widehat{\theta}_{\text{MAP}}$ sont donc équivalents pour n "grand".

4.2 Exercice 2 : Estimation de l'information binaire

La même information binaire $\theta \in \{0,1\}$ est transmise 2 fois consécutives vers un récepteur à travers un canal de transmission. Ces 2 informations sont perturbées par un bruit supposé Gaussien centré de variance σ^2. Le message reçu s'écrit alors $z = (z_1, z_2)$ où $z_i = \theta + e_i, i = 1, 2$ et $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le problème consiste à retrouver le symbole émis θ à partir du message reçu $z = (z_1, z_2)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.
2. On suppose qu'on dispose d'une information a priori sur les bits "0" et "1" qui se traduit par $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$. Déterminer l'estimateur du maximum a Posteriori du paramètre θ. Représenter dans le plan (z_1, z_2) les points associés à la décision $\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = 0$ et les points associés à la décision $\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = 1$.
3. Comment les résultats de la question se modifient-ils lorsque $P(0) = p$ et $P(1) = q = 1 - p$?
4. Que pensez vous de l'estimateur de la moyenne a posteriori du paramètre θ ?

1.
$$f(z_1, z_2; \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(z_1-\theta)^2 + (z_2-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Donc
$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = 0 \text{ si } f(z_1, z_2; 0) \geq f(z_1, z_2; 1)$$

c'est-à-dire
$$\widehat{\theta}_{\text{MV}} = 0 \text{ si } z_1^2 + z_2^2 \leq (z_1-1)^2 + (z_2-1)^2$$

c'est-à-dire qu'on décide que le bit transmis est 0 si (z_1, z_2) est plus proche de $(0, 0)$ que de $(1, 1)$.

2.
$$f(\theta | z_1, z_2) \propto \exp\left[-\frac{(z_1-\theta)^2 + (z_2-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Comme la loi a priori est uniforme, on a
$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = \widehat{\theta}_{\text{MV}}$$

3.
$$f(\theta | z_1, z_2) \propto (1-p)^\theta p^{1-\theta} \exp\left[-\frac{(z_1-\theta)^2 + (z_2-\theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

donc
$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = 0 \text{ si } f(0 | z_1, z_2) \geq f(1 | z_1, z_2)$$

c'est-à-dire si

$$p \exp\left[-\frac{z_1^2+z_2^2}{2\sigma^2}\right] \geq (1-p)\exp\left[-\frac{(z_1-1)^2+(z_2-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

soit

$$\ln p - \frac{1}{2\sigma^2}\left(z_1^2+z_2^2\right) \geq \ln(1-p) - \frac{(z_1-1)^2+(z_2-1)^2}{2\sigma^2}$$

c'est-à-dire

$$z_1^2+z_2^2 \leq (z_1-1)^2+(z_2-1)^2 - 2\sigma^2\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

Par exemple, si $p = 1/4$, on plus de chance d'avoir le bit 1 que le bit 0 et la région de décision est

$$\widehat{\theta}_{\text{MAP}} = 0 \text{ si } z_1^2+z_2^2 \leq (z_1-1)^2+(z_2-1)^2 - 2\sigma^2\ln 3$$

qui est plus réduite que celle obtenue à la question 2), ce qui est normal.

4. L'estimateur MMSE n'est pas à valeur dans $\{0,1\}$ donc il n'est pas adapté à ce problème.

5 Tables de transformées de Fourier

Transformée de Fourier

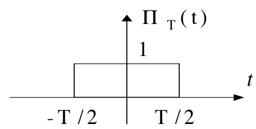
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

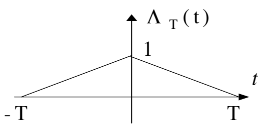
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f) \rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f) \rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1 \\ \delta(t - t_0) f(t) &= \delta(t - t_0) f(t_0) \\ \delta(t - t_0) * f(t) &= f(t - t_0) \end{aligned}$$