Département EEEA, 2A **Octobre 2022**

EXERCICES DE TRAITEMENT DU SIGNAL - Signaux aléatoires - N7EE10A

TD1

Corrélations et DSP

Exercice 1 : Etude du secteur
On modélise le courant électrique du secteur en prenant en compte que la fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$ et que sa phase n'est pas connue. Pour cela, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ, θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$.
Calculer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

Exercice 2 : Extrait partiel 2019-2020
On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = A \exp[j2\pi Bt]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, +1\}$, c'est-à-dire $P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$ et B est une variable aléatoire indépendante de A et de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. On rappelle qu'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ possède la densité

$$p(b) = \begin{cases} 1 \text{ si } b \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $x(t)$ est un signal stationnaire et déterminer la densité spectrale de puissance et la puissance du signal $x(t)$.

Exercice 3 : Modulation d'amplitude
Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :

$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$. Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?
3. Montrer qu'on retrouve les mêmes résultats qu'aux questions 1 et 2 lorsque $A(t)$ est un signal à énergie finie et θ une phase fixe (que l'on prendra égale à 0 pour simplifier les calculs).

TD2

Filtrage linéaire

Revoir les exercices faits en 1A lors du TD2 (filtrage linéaire) 1) *Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire* et 2) *Annulateur de bruit.*

Exercice 4 : Variance d'Allan

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire de moyenne $E[x(t)] = 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$.

1) On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)du$$

- Montrer que $y(t) = F_T[x(t)]$, où F_T est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle $h_T(t)$ et la transmittance $H_T(f)$ de ce filtre F_T.

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$ notée $s_y(f)$ en fonction de $s_x(f)$. En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.

- Montrer que la puissance du signal $y(t)$ s'écrit

$$P_y = \int s_x(f)\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T)\,df \quad \text{avec} \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2) On considère le signal constant par morceaux défini par

$$D(t) = \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{\sqrt{2}} \text{ si } t \in [kT, (k+1)T[$$

- Déterminer la puissance du signal $D(t)$ notée $P_D(T)$ en fonction de $R_y(0)$ et $R_y(T)$ puis sous une forme intégrale dépendant de $s_x(f)$.

- En utilisant la parité de la densité spectrale de puissance $s_x(f)$, en déduire

$$P_D(T) = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} s_x(f)df$$

  La puissance $P_D(T)$ est appelée **variance d'Allan** du signal $x(t)$.

3) On rappelle les relations suivantes

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^2}du = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3}du = \log 2 \text{ et } \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4}du = \frac{\pi}{3}$$

Représenter graphiquement $\log P_D(T)$ en fonction de $\log T$ dans les cas suivants :
- pour un bruit blanc, avec $s_x(f) = K_0$;
- pour un bruit de Flicker avec $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$;
- pour un bruit de type marche aléatoire avec $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$.

À votre avis, quel est l'intérêt de la variance d'Allan ?

Exercice 5 : Filtrage adapté

On considère un signal déterministe à énergie finie $s(t)$ défini sur l'intervalle $[0, T]$ perturbé par un bruit $b(t)$ additif stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_b(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_b(f)$

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

On filtre le signal $x(t)$ à l'aide d'un fitre linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$ et on note $y(t) = x(t) * h(t)$ la sortie de ce filtre.

1) On note $y_s(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $s(t)$. Montrer que

$$y_s(t_0) = \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi f t_0} df$$

où $S(f)$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$. Déterminer $y_s(t_0)$ lorsque

$$s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Tracer $y_s(t_0)$ en fonction de t_0.

2) Soit $y_b(t_0)$ la sortie du filtre à l'instant t_0 lorsque l'entrée est $b(t)$. Montrer que la puissance du signal $y_b(t_0)$ s'écrit

$$E\left[y_b^2(t_0)\right] = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df$$

Déterminer cette puissance pour $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et pour le filtre de la question précédente.

3) On admet que le filtre qui maximise le rapport signal sur bruit à l'instant t_0 ($\text{SNR}(t_0) = y_s^2(t_0)/E\left[y_b^2(t_0)\right]$) est défini par

$$H_0(f) = k\frac{S^*(f)}{s_b(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$

où k est une constante. Dans le cas d'un bruit blanc défini par $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$, déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre notée $h_0(t)$ en fonction de k, N_0, t_0 et du signal $s(t)$. Tracer $h_0(t)$ dans le cas du signal $s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$.

Filtrage non linéaire

Exercice 6 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp\left[X(t)\right].$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

Remarque : On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une loi gaussienne $N\left(m, \sigma^2\right)$ est :

$$m(u) = E\left[e^{Xu}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

Exercice 7 : Filtrage non linéaire de type cubique

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = X^3(t)$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près.
2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire Z gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :
$$E\left[Z^{2n}\right] = (2n)!!\sigma^{2n} \text{ avec } (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1$$
En déduire le constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.

Exercice 8 : Signe d'un processus aléatoire

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = \text{signe}[X(t)]$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près. On rappelle la primitive suivante
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \text{Arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + K$$
2. Déterminer la constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.

Processus aléatoires

Exercice 9 : Arrivée d'appels téléphoniques

On suppose que les appels téléphoniques arrivant à l'N7 suivent un processus de Poisson de paramètre λ. Sachant que deux appels sont arrivés entre 7h00 et 8h00, quelle est la probabilité

1. que ces deux appels soient arrivés entre 7h00 et 7h30 ?
2. l'un au moins de ces appels soit arrivé entre 7h00 et 7h30 ?

On rappelle que si X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$, on a

$$P[X = k] = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 10 : Processus multi-niveaux à transitions Poissonniennes

On considère une suite d'instants $\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ associée à un processus de Poisson homogène de paramètre λ et on forme le signal aléatoire $X(t)$ de la manière suivante

$$X(t) = A_n \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

où $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires centrées de corrélation stationnaire $c(k)$, c'est-à-dire telle que

$$E[A_n] = 0, \quad E[A_n A_{n+k}] = c(k).$$

1. Calculer la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ en fonction des corrélations $c(k)$ et de λ.
2. Application au cas $c(k) = \sigma_A^2 \delta(k)$. Comparer au signal des télégraphistes.
3. Application au cas d'une suite Markovienne définie par $c(k) = \sigma_A^2 p^k$ avec $|p| < 1$.

Exercice 11 : Changement d'horloge

On considère un signal des télégraphistes $A(t)$ à valeurs dans $\{-1, +1\}$ et un signal aléatoire stationnaire $Z(t)$ de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_Z(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_Z(f)$. On suppose que les signaux $A(t)$ et $Z(t)$ sont indépendants et on s'intéresse au signal $V(t) = Z(t - A(t))$ qui prend en compte le fait qu'on ne connait pas parfaitement les instants auxquels sont observés le signal $Z(t)$.

1. Calculer les deux fonctions caractéristiques suivantes

$$\psi(f) = E\left[e^{2i\pi f A(t)}\right], \quad \phi(\tau, f) = E\left[e^{2i\pi f [A(t-\tau) - A(t)]}\right].$$

2. Déterminer la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $V(t)$ que l'on exprimera en fonction de $s_z(f)$ et de $\phi(\tau, f)$.

Transformée de Fourier

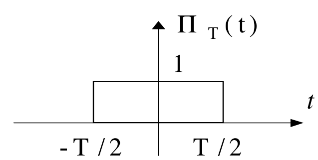
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

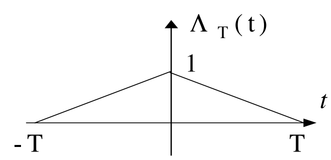
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f-nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0) \\ \delta(t-t_0) * f(t) &= f(t-t_0) \end{aligned}$$