EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 20 Novembre 2014 (8h-9h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Filtre exponentiel

On considère un filtre non-linéaire dit exponentiel qui transforme un signal aléatoire $X(t)$ en un signal aléatoire $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = \exp[X(t)].$$

On supposera dans cet exercice que $X(t)$ est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $r_X(\tau)$.

1. Qu'est-ce qu'un signal Gaussien ? Justifier brièvement le fait que $Y(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi normale $N(0, \sigma^2)$ est
$$m(u) = E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}u^2\right).$$
En déduire $E[Y(t)]$ et $E\left[Y^2(t)\right]$.

3. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.

Exercice 2: Formule de Benett

1. On considère une suite de variables aléatoires binaires a_k telles que $P[a_k = 0] = p$ et $P[a_k = 1] = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. Déterminer la moyenne et la variance de a_k.

2. On forme le signal
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - kT)$$
que l'on filtre à l'aide d'un filtre F_h de réponse impulsionnelle $h(t)$, où $h(t)$ est une fonction déterministe à énergie finie de support l'intervalle $[-T/2, T/2]$ avec $T > 0$ (i.e., $h(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$. Déterminer l'expression de la sortie du filtre $y(t) = F_h[X(t)]$ en fonction de h et des variables aléatoires a_k. Représenter une réalisation de $y(t)$ dans le cas où
$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t < T/2 \\ -1 \text{ si } -T/2 < t < 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction h définie ci-dessus est à énergie finie et déterminer sa densité spectrale de puissance $s_h(f)$. On notera $r_h(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation qu'on ne demande pas de déterminer pour cet exemple.

4. Déterminer la moyenne du signal $y(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire ?

5. On introduit une variable aléatoire θ uniforme sur l'intervalle $[0, T]$ et indépendante des variables aléatoires a_k. On forme le signal
$$z(t) = y(t - \theta).$$

- Montrer que la moyenne de $z(t)$ s'écrit

$$E[z(t)] = \frac{(1-p)H(0)}{T}$$

où $H(f) = \text{TF}\,[h(t)]$ est la transformée de Fourier de $h(t)$.

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de $z(t)$ s'écrit

$$r_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) r_h(\tau - kT)$$

où $r_a(k) = E[a_n a_{n-k}]$ et où $r_h(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $h(t)$.

- Quel est l'intérêt d'avoir introduit une phase aléatoire θ dans la définition de $z(t)$?
- Déterminer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ en fonction de T, $H(f)$ et de

$$s_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) e^{-j2\pi kTf}.$$