EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 19 Novembre 2015

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Signal sinusoidal (2 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = A\cos(\pi f_0 t)$$

avec $A > 0$ et $f_0 > 0$ (deux constantes). Quelle est la classe du signal $x(t)$? (Est-il aléatoire, déterministe à énergie finie, déterministe à puissance finie périodique ou déterministe à puissance finie non-périodique ?). En déduire la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et la densité spectrale de puissance $s_x(f)$ de ce signal. Que représente $R_x(0)$?

Exercice 2 (2 points)

Soit A une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (de moyenne m et de variance σ^2). Soit ϕ une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de A. Répondre aux questions de l'exercice précédent avec le signal défini par

$$x(t) = Ae^{j\phi t}.$$

Exercice 3 : Moyennage temporel (2 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ de moyenne $E[x(t)] = m$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} x(u)du$$

avec $a > 0$ (une constante). Le signal $y(t)$ est-il obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$? Si oui, préciser la réponse impulsionnelle et la transmittance de ce filtre. On suppose que $x(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_x(f) = 1$. Déterminer la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$.

Exercice 4 : Signal des télégraphistes (2 points)

Soit A une variable aléatoire prenant les valeurs $+a$ et $-a$ (où $a > 0$ est une constante) avec les probabilités $p = 1/2$ et $q = 1/2$. Soit $X(t)$ un signal aléatoire construit à partir d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ tel que $X(0) = A$, et pour tout $t > 0$, $X(t) = A$ si le nombre d'instants dans l'intervalle $[0, t[$ (noté $N(0, t)$ dans le cours) est pair et $X(t) = -A$ si ce nombre d'instants est impair. On suppose que les variables aléatoires A et $N(t, \tau)$ sont indépendantes $\forall(t, \tau)$. Déterminer $P[X(t) = a]$, puis la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$.

Rappel : On rappelle que la variable aléatoire $N(t, \tau)$ qui est le nombre d'instants dans l'intervalle $[t, t + \tau[$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$, c'est-dire que

$$P[N(t, \tau) = k] = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!}\exp(-\lambda|\tau|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5 : Questions de cours (2 **points)**

Répondre avec précision aux questions ci-dessous

1. Qu'est ce qu'un bruit blanc ? (donner la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation d'un tel signal)
2. Qu'est ce qu'un bruit gaussien ? (quelle est la densité de probabilité de $X_1 = [x(t_1), ..., x(t_n)]^T$ pour un tel signal ?)
3. Qu'est ce qu'un filtre anti-repliement ? Est-il analogique ou numérique ?
4. Qu'est ce que l'interpolateur de Shannon ? Quel est son intérêt ?

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

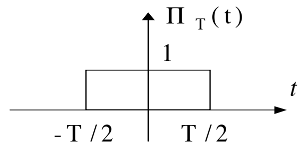
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \|X(f)\| \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

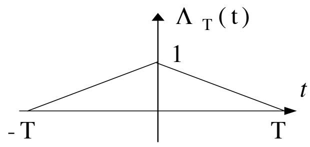
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \|X(f)\|^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f-nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$$

3