EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 8 Décembre 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Signal sinusoidal fenêtré (2 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\Lambda_T(t)$$

avec $T > 0$ et $f_0 > 0$ (deux constantes) et

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} \text{ si } 0 < t < T \\ 1 + \frac{t}{T} \text{ si } -T < t < 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Indiquer sans faire de calcul (mais en le justifiant) la classe du signal $x(t)$ (est-il aléatoire, déterministe à énergie finie, déterministe à puissance finie périodique, déterministe à puissance finie non-périodique ?). En déduire la densité spectrale $s_x(f)$ de ce signal. En supposant que la fréquence f_0 est suffisamment grande pour faire l'approximation $\text{sinc}\left[\pi T(f - f_0)\right] \text{sinc}\left[\pi T(f + f_0)\right] \simeq 0$, en déduire une expression approchée de l'énergie du signal $x(t)$. On rappelle la relation suivante

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 2 : Produit scalaire (2 points)

Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire réel de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. Déterminer $E[x'(t)x(t-\tau)]$, où $x'(t)$ est la dérivée du signal $x(t)$, sous la forme d'une intégrale dépendant de $s_x(f)$. En déduire $E[x'(t)x(t-\tau)]$ lorsque $s_x(f) = \frac{1}{f},\ f \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dérivée d'un signal aléatoire (2 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = x'(t)$$

où $x'(t)$ est la dérivée du signal $x(t)$. Le signal $y(t)$ est-il obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$? Si oui, préciser la transmittance de ce filtre. On suppose que $x(t)$ est un signal de densité spectrale de puissance $s_x(f) = \frac{1}{f^2},\ f \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$. Comment appelle-t-on un signal qui possède cette fonction d'autocorrélation ?

Exercice 4 : Signal cubique (2 **points)**

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = x^3(t)$. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours) est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$

1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive C.

2. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1)(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}.$$

   En déduire la valeur de la constante C.

Exercice 5 : Processus de Poisson homogène (2 **points)**

On considère un processus de Poisson homogène de paramètre λ et on rappelle que pour un tel processus la variable aléatoire $N(t, \tau)$, qui est le nombre d'instants dans l'intervalle $[t, t+\tau[$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$, c'est-dire que

$$P[N(t, \tau) = k] = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!} \exp(-\lambda|\tau|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les probabilités suivantes

1. P_1: probabilité pour que le nombre d'instants $N(t, \tau)$ soit pair

2. P_2: probabilité pour que le nombre d'instants dans l'intervalle $[a, b[$ (avec $a < b$) soit inférieur ou égal à 1.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

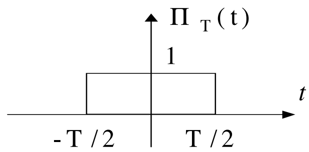
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

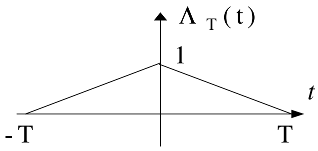
Série de Fourier

$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0)\,f(t) = \delta(t - t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$