EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 7 Décembre 2017

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (2 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t < T \\ -1 \text{ si } -T < t < 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

avec $T > 0$ connu. Quelle est la classe du signal $x(t)$? Déterminer la transformée de Fourier de $x(t)$, sa densité spectrale $s_x(f)$ et sa fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$.

Exercice 2 (3 points)

Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire réel de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$.

- Exprimer $E[(x(t) - x(t-\tau))^2]$ en fonction de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$. Qu'en déduit-on sur la signification de $R_x(\tau)$?
- L'instant τ étant connu, déterminer en fonction de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$ le réel a (noté $\widehat{a}(\tau)$) qui minimise $g(a) = E[(x(t) - ax(t-\tau))^2]$. Déterminer $g\left[\widehat{a}(\tau)\right]$ en fonction de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$ et justifier, en utilisant une propriété de la fonction d'autocorrélation, le fait que le résultat obtenu est positif. Que représente $\widehat{a}(\tau)x(t-\tau)$?

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = \Lambda_1(\tau)$ avec

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau \text{ si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 + \tau \text{ si } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et on forme le signal aléatoire

$$Y(t) = \int_{t-2}^{t} X(u)du$$

- Montrer que $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ avec un filtre dont on déterminera la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.
- Montrer que la densité spectrale de puissance de $X(t)$ s'écrit

$$s_Y(f) = \frac{[1 - \cos(2\pi f)]\,[(1 - \cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}$$

On rappelle la relation $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Exercice 4 (2 **points)**

On supposent que les appels téléphoniques arrivant à l'N7 suivent un processus de Poisson de paramètre λ. Sachant que deux appels sont arrivés entre 7h00 et 8h00, quelle est la probabilité

- que ces deux appels soient arrivés entre 7h00 et 7h30 ?
- l'un au moins de ces appels soit arrivé entre 7h00 et 7h30 ?

On rappelle que si X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$, on a

$$P[X = k] = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Transformée de Fourier

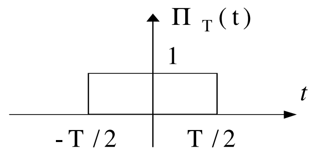
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

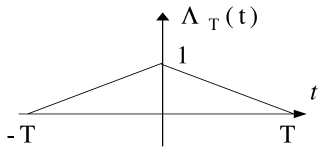
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T\sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi T f)$
$B\sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$$