EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Lundi 3 Décembre 2018

*Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)*

**Exercice 1 ($4$ points)**

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp\left[j(2\pi f t + \phi)\right]$$

où $f$ est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ (où $f_0$ et $\Delta f$ sont des constantes telles que $f_0 > \Delta f$) et $\phi$ est une phase constante appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

- Déterminer la moyenne du signal $x(t)$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire ?
- Calculer la fonction d'autocorrélation, la densité spectrale de puissance et la puissance de $x(t)$.

**Exercice 2 ($3$ points)**

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) passe bas de transmittance $H(f) = \Pi_{2B}(f)$ défini par

$$H(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } f \in ]-B, B[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $B > 0$. On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire $x(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal aléatoire $a(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, où $A > 0$ et $f_0 > 0$ sont deux constantes et $\phi$ une phase aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ et d'un bruit blanc stationnaire $b(t)$ passe bande de densité spectrale de puissance

$$s_b(f) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \text{ si } f \in ]-f_0 - \Delta, -f_0 + \Delta[ \\ \frac{1}{\Delta} \text{ si } f \in ]f_0 - \Delta, f_0 + \Delta[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $\Delta \in ]0, f_0[$ et $f_0 < B < f_0 + \Delta$. On a donc en sortie de ce filtre un signal noté $z(t)$ défini par

$$z(t) = a(t) * h(t) + b(t) * h(t).$$

avec $h(t) = \text{TF}^{-1}\left[H(f)\right]$.

- Déterminer le rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre défini par $\gamma_e = \frac{P_a}{P_b}$, où $P_a$ et $P_b$ sont les puissances des signaux $a(t)$ et $b(t)$.
- Déterminer les puissances $P_{z_a}$ et $P_{z_b}$ des signaux filtrés

$$z_a(t) = a(t) * h(t) \quad \text{et} \quad z_b(t) = b(t) * h(t).$$

- Montrer que le rapport signal sur bruit en sortie du filtre défini par $\gamma_s = \frac{P_{z_a}}{P_{z_b}}$ est supérieur à $\gamma_e$.

**Exercice 3** (3 **points)**

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à “écrêtage progressif”

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{2}.$$

On l’applique à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t) = G\left[X(t)\right].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\Sigma$ est la matrice de covariance du couple $(U, V)$ définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1) Exprimer les éléments de $\Sigma$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que l’autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2) On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d’autocorrélation $R_X(\tau)$, on a

$$E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t) + X^2(t-\tau)}{2}\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{(1 + R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

et on rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin\left(\frac{u}{|a|}\right)$$

En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près qu’on ne demande pas de calculer.

## Transformée de Fourier

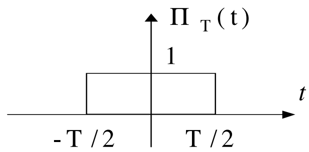
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

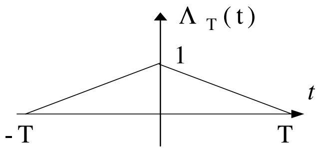
| | **T.F.** | |
|---|---|---|
| $x(t)$ réelle paire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ réelle paire |
| $x(t)$ réelle impaire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ imaginaire pure impaire |
| $x(t)$ réel | $\rightleftharpoons$ | $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$ |
| $ax(t)+by(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $aX(f)+bY(f)$ |
| $x(t-t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)e^{-i2\pi ft_0}$ |
| $x(t)e^{+i2\pi f_0t}$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f-f_0)$ |
| $x^*(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X^*(-f)$ |
| $x(t)\ .\ y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)*Y(f)$ |
| $x(t)*y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)\ .\ Y(f)$ |
| $x(at)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| $\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$ | $\rightleftharpoons$ | $(i2\pi f)^n X(f)$ |
| $(-i2\pi t)^n x(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$ |

| **Formule de Parseval** |
|---|
| $\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$ |
| $\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$ |

| **Série de Fourier** |
|---|
| $x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$ |
| avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$ |

| | **T.F.** | |
|---|---|---|
| $1$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $1$ |
| $e^{+i2\pi f_0t}$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f-f_0)$ |
| $\delta(t-t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-i2\pi ft_0}$ |
| $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$ |
| $\cos(2\pi f_0t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ |
| $\sin(2\pi f_0t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert}$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$ |
| $e^{-\pi t^2}$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-\pi f^2}$ |
| $\Pi_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$ |
| $\Lambda_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T\sin c^2(\pi Tf)$ |
| $B\sin c(\pi Bt)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Pi_B(f)$ |
| $B\sin c^2(\pi Bt)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Lambda_B(f)$ |




**!!!!!! Attention !!!!!**

$\Pi_T(t)$ est de support égal à $T$.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1 \\
\delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0) \\
\delta(t-t_0)*f(t) &= f(t-t_0)
\end{aligned}$$