EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 5 Novembre 2019

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = A \exp[j2\pi Bt]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, +1\}$, c'est-à-dire $P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$ et B est une variable aléatoire indépendante de A et de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. On rappelle qu'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ possède la densité

$$p(b) = \begin{cases} 1 \text{ si } b \in]0, 1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $x(t)$ est un signal stationnaire et déterminer la densité spectrale de puissance et la puissance du signal $x(t)$.

Exercice 2 : Annulation d'échos (4 points)

Un système "réverbérant" d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est défini par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x(t - kT).$$

On supposera dans cet exercice que $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire et que $h_0 = 1$, $h_1 = -a$ (avec $a \in]0, 1[$) et $h_k = 0, \forall k \geq 2$.

1. Montrer que $y(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ et déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$ de ce filtre.

2. On peut considérer que $y(t)$ est une superposition d'échos du signal $x(t)$. Afin d'annuler ces échos, on peut filtrer le signal $y(t)$ par un filtre inverse de transmittance $G(f) = \frac{1}{H(f)}$. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse notée $g(t)$ et montrer qu'elle s'écrit

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

   avec des coefficients g_k à déterminer.
   Remarque : On pourra utiliser le fait que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

3. On approche le filtre inverse précédent par un filtre à réponse impulsionnelle finie.

$$g_K(t) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \delta(t - kT)$$

   et on note $z(t) = y(t) * g_K(t)$ la sortie de l'annulateur d'échos. Déterminer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ en fonction de celle de $x(t)$ notée $s_x(f)$ et des paramètres a, K et T.

Exercice 3 : Puissance quatrième d'un signal aléatoire (2 **points)**

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = x^4(t)$. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du signal cubique $z(t) = x^3(t)$ (déterminée en TD) est

$$R_z(\tau) = R_{x^3}(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x(\tau)R_x^2(0).$$

1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive C.

2. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}.$$

   En déduire la valeur de la constante C.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

T.F.

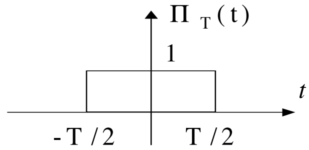
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

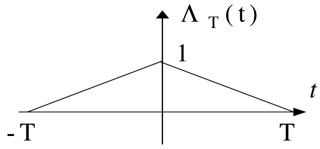
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$