EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 15 Décembre 2020

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = A \exp\left[-2j\pi Bt\right]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $]-1,+1[$, B est une variable aléatoire indépendante de A possédant une loi de Laplace de densité

$$f(b) = \frac{1}{2}\exp(-|b|), b \in \mathbb{R}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire A uniforme sur $]-1,1[$ vérifie $E[A] = 0$ et $E[A^2] = 1/3$.

1. Montrer que $Z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.
2. Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $Z(t)$.
3. On considère un filtre de transmittance $H(f) = e^{-3|f|}$ dont l'entrée est le signal $Z(t)$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie $W(t) = Z(t) * h(t)$ avec $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$.

Exercice 2 : Questions de cours sur le filtre adapté (3 points)

On considère le signal $X(t)$ défini par

$$X(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0,1[\\ 2-t \text{ si } t \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Le signal $X(t)$ est-il à énergie finie, à puissance finie ou aléatoire ? Déterminer sa fonction d'autocorrélation en $\tau = 0$.
2. Représenter graphiquement la réponse impulsionnelle du filtre adapté au signal $X(t)$ lorsque l'instant de décision est $t_0 = 2$.
3. Déterminer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté dans le cas d'un bruit blanc additif stationnaire de densité spectrale de puissance $s_n(f) = 1$.

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = \beta\alpha^{x(t)} = \beta\exp[x(t)\ln(\alpha)]$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1. À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante multiplicative notée K.
2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi gaussienne $N\left(m,\sigma^2\right)$ est :

   $$E\left[e^{Zu}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right), \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

   En déduire la constante K.

Remarque : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 254 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

Transformée de Fourier

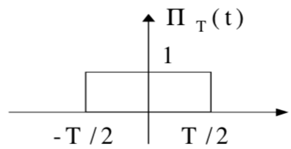
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

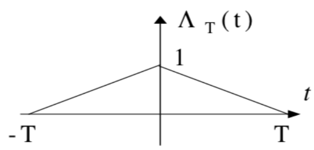
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c} \text{Re}\left\{X(f)\right\}\ \text{paire} \\ \text{Im}\left\{X(f)\right\}\ \text{impaire} \\ \lvert X(f)\rvert\ \text{pair} \\ \arg\left\{X(f)\right\}\ \text{impaire} \end{array}\right.$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta\left(f-nf_0\right)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos\left(2\pi f_0t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2f^2}{a^2})$
$e^{-a^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c\left(\pi Tf\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi Tf\right)$
$B\sin c\left(\pi Bt\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi Bt\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T\left(t\right)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$

$$\begin{aligned} \delta\left(t\right) &= \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{array}\right. \quad \text{et } \int_{\mathbb{R}}\delta\left(t\right)dt=1 \\ \delta\left(t-t_0\right)f(t) &= \delta\left(t-t_0\right)f(t_0) \\ \delta\left(t-t_0\right)*f(t) &= f(t-t_0) \end{aligned}$$