EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 14 Décembre 2021 (10h00-11h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Filtrage (2 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s(f)$. On construit le signal $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = X'(t) - X''(t)$$

où $X'(t)$ et $X''(t)$ sont les dérivées première et seconde du processus aléatoire $X(t)$.

1. Montrer que $Z(t)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la transmittance.
2. Déterminer la densité spectrale de puissance de $Z(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.

Exercice 2 : Ergodicité (4 points)

On considère le signal $X(t)$ défini par $X(t) = X_1(t) + AX_2(t)$, où A est une variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$ (i.e., $P[A = 0] = P[A = 1] = 1/2$), et $X_1(t), X_2(t)$ sont deux signaux aléatoires stationnaires de moyennes m_1 et m_2, de fonctions d'autocorrélation $R_1(\tau)$ et $R_2(\tau)$ et de densités spectrales de puissance $s_1(f)$ et $s_2(f)$. On suppose également que $A, X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont mutuellement indépendants.

1. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.
2. En supposant que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont des signaux aléatoires ergodiques au premier ordre, à quelles conditions sur m_1 et m_2 le signal aléatoire $X(t)$ est-il également ergodique au premier ordre ?

Exercice 3 : Transformation ReLu (4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = g[x(t)]$ avec

$$g(v) = \begin{cases} Av \text{ si } v \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A est une constante strictement positive ($A > 0$).

1. Montrer que $E\{\text{sign}[x(t)]\} = 0$ (1pt).
2. Exprimer la dérivée de g en tout point $u \neq 0$ en fonction de la fonction sign définie par

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } \; u > 0 \\ -1 \text{ si } \; u < 0. \end{cases}$$

   À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$ en fonction de la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (1pt).

3. On rappelle que la la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (déterminée en TD) est définie par

$$R_u(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$

et qu'on a le résultat suivant

$$\int \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

En déduire $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive notée C (1pt).

4. Déterminer la constante C (1pt).

Remarque : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 222 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

Transformée de Fourier

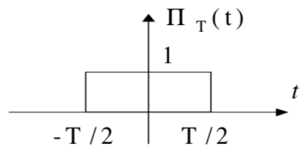
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

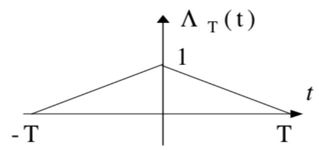
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}\right)$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$