EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 14 Décembre 2022 (10h00-11h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Filtrage et stationnarité (6 points)

On considère un signal aléatoire $X(t)$ défini par

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

où $X_1(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, $f_0 > 0$ est une constante positive, θ est une phase aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, \pi[$ et X_2 est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_2(f) = \alpha, \forall f$, avec $\alpha > 0$. On suppose également que $X_1(u)$ et $X_2(v)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\forall u \neq v$. On notera que $X_1(t)$ n'est pas le signal étudié en cours car sa phase est uniforme sur l'intervalle $]0, \pi[$ et non pas sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1. (1.5pt) Déterminer la moyenne du signal $X(t)$. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ?
2. (2pts) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X_1(t)$ notées $R_1(\tau)$ et $s_1(f)$. En déduire la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$.
   On rappelle la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.
3. (1pt) On filtre le signal $X(t)$ à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$ définies par
   $$h(t) = \begin{cases} b\exp(-bt) & \text{si } \ t > 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases} \quad \text{et } H(f) = \frac{b}{b + j2\pi f}$$
   où $b > 0$ est une constante. Déterminer les densités spectrales de puissance de $Y_1(t) = X_1(t) * h(t)$ et de $Y_2(t) = X_2(t) * h(t)$, puis celle de $Y(t) = X(t) * h(t)$.
4. (1.5pt) Déduire de la question précédente la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$.

Exercice 2 : Théorème de Bussgang (5 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un signal aléatoire gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ qui fournit le signal $Y(t)$ défini par

$$Y(t) = g\left[X(t)\right] = X^3(t).$$

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$ et à la fonction d'intercorrélation entre $Y(t)$ et $X(t-\tau)$ notée $R_{YX}(\tau)$. On rappelle que la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u, v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}.$$

1. (1pt) Exprimer les éléments de $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que les fonctions $R_Y(\tau)$ et $R_{YX}(\tau)$ ne dépendent que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2. (1pt) On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = X^3(t)$, $X_2 = X(t-\tau)$ et $Y_2 = g[X_2] = X^3(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$. En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_{X^2}(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$ à une constante additive près notée C.

3. (1pt) Déterminer la constante C.

   On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}.$$

4. (2pts) On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = g[X(t)] = X^3(t)$, $X_2 = X(t-\tau)$ et $Y_2 = X(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$. En déduire $R_{YX}(\tau)$ à une constante additive près notée K. Déterminer ensuite la constante additive K.

Transformée de Fourier

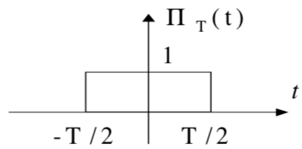
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

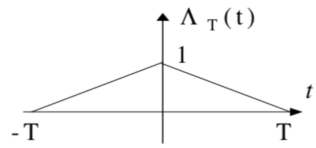
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}\right)$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t - t_0)\,f(t) &= \delta(t - t_0)\,f(t_0) \\ \delta(t - t_0) * f(t) &= f(t - t_0) \end{aligned}$$