EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 19 Décembre 2022 (16h00-17h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Stationarité et ergodicité (3 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ stationnaire de moyenne $E[x(t)] = m \neq 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On considère une variable aléatoire réelle A de moyenne nulle ($E[A] = 0$) et de variance $\sigma_A^2 > 0$ indépendante du signal $x(t)$. On forme le signal

$$y(t) = Ax(t).$$

1. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire ?

2. On suppose que le signal $x(t)$ est ergodique au premier ordre (pour la moyenne). Le signal $y(t)$ est-il ergodique au premier ordre ?

Exercice 2 : Équation différentielle (3 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne nulle $E[x(t)] = 0$ et de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = a^2\delta(\tau)$, où a est une constante. Un autre signal aléatoire $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = x(t).$$

1. Déterminer $x(t)$ lorsque $y(t) = e^{j2\pi ft}$. En déduire que $x(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $y(t)$ par un filtre de transmittance $H(f) = b + j2\pi df$, où b et d sont deux nombres réels à déterminer. On admet que dans ce cas, $y(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ par un filtre de transmittance $G(f) = \frac{1}{H(f)}$. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse notée $g(t)$.

2. Déterminer la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$.

Exercice 3 : Valeur absolue d'un processus aléatoire stationnaire 4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = g[x(t)] = |x(t)|$.

1. Déterminer la moyenne du signal $y(t)$ que l'on exprimera en fonction de $R_x(0)$.

2. Exprimer la dérivée de g en tout point $u \neq 0$ à l'aide de la fonction signe définie par

$$\text{signe}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } \; u > 0 \\ -1 \text{ si } \; u < 0. \end{cases}$$

   À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$ en fonction de la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$

3. On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (déterminée en TD) est définie par

$$R_u(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$

et qu'on a le résultat suivant

$$\int \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

En déduire $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive notée C

4. Déterminer la constante C.

Transformée de Fourier

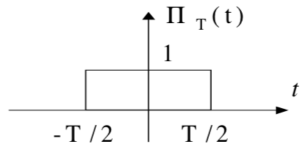
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

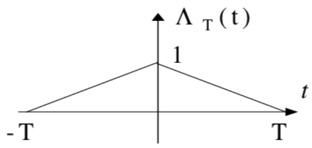
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}\right)$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et } \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t - t_0)\,f(t) &= \delta(t - t_0)\,f(t_0) \\ \delta(t - t_0) * f(t) &= f(t - t_0) \end{aligned}$$