
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

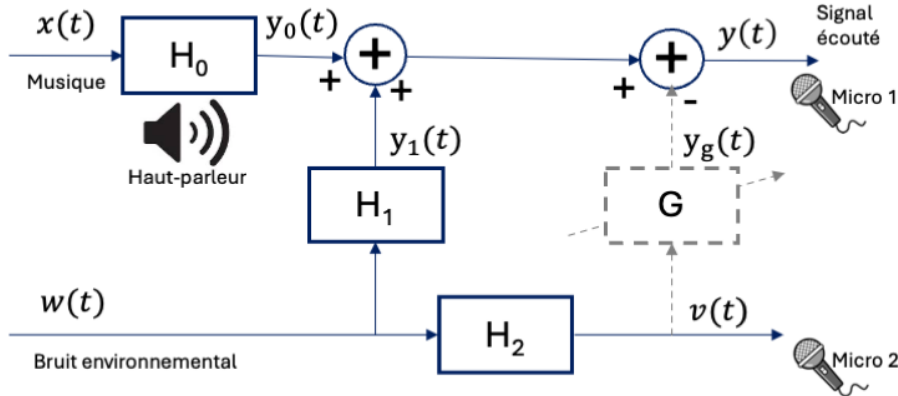
Mardi 2 Décembre 2025 (10h15-11h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Réduction de bruit (6 points)

Le schéma de principe d'un casque (écouteur) à réduction de bruit environnemental est décrit ci-dessous. Nous souhaitons écouter de la musique $x(t)$ transmise sur un haut-parleur au travers d'un filtre de transmittance inconnue $H_0(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_0(t)$, mais le signal en sortie du haut-parleur $y_0(t)$ est perturbé par un bruit additif d'environnement inconnu $w(t)$, qui a été filtré par un filtre de transmittance inconnue $H_1(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_1(t)$. Nous mesurons le signal reçu par l'oreille $y(t)$ avec le microphone 1. Un microphone supplémentaire (Micro 2) capte également le signal $v(t)$ qui est le bruit filtré par un filtre inconnu de transmittance $H_2(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_2(t)$.

Nous souhaitons concevoir un filtre $G(f)$ annulateur de bruit tel que le bruit affectant le signal reçu $y(t)$ soit parfaitement annulé. Tous les signaux considérés dans cet exercice sont à valeurs dans \mathbb{R} .



1. Le signal reçu par le microphone 1 est $y(t) = y_0(t) + y_1(t) - y_g(t)$, où $y_0(t)$ est le terme dépendant du signal $x(t)$ et de $h_0(t)$ (sortie du filtre de transmittance H_0), $y_1(t)$ est le terme dépendant du bruit $w(t)$ et de $h_1(t)$, et enfin $y_g(t)$ dépend de $w(t)$, $h_2(t)$ et $g(t) = \text{TF}^{-1}[G(f)]$. Déterminer la transmittance idéale $G(f)$ permettant d'annuler le bruit d'environnement $y_1(t) - y_g(t)$.
2. Les signaux $x(t)$ et $w(t)$ sont supposés aléatoires stationnaires de densités spectrales de puissance $s_x(f)$ et $s_w(f)$. On suppose également que le bruit $w(t)$ est de moyenne nulle et que les signaux $x(t)$ et $w(t)$ sont indépendants.
 - Déterminer $s_v(f)$ en fonction de $H_2(f)$ et $s_w(f)$.
 - On rappelle que d'après la formule des interférences, si $y_1(t) = w(t) * h_1(t)$ et $y_2(t) = w(t) * h_2(t)$ alors

$$s_{y_1 y_2}(f) = \text{TF}[R_{y_1 y_2}(\tau)] = s_w(f) H_1(f) H_2^*(f),$$

où $R_{y_1 y_2}(\tau) = E[y_1(t) y_2(t - \tau)]$ est la fonction d'intercorrélation entre les signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$. En l'absence du filtre annulateur G , montrer que $R_{y v}(\tau) = E[y(t) v(t - \tau)] = E[y_1(t) v(t - \tau)]$, où $y_1(t)$ et $v(t)$ ont été définis ci-dessus. En déduire $s_{y v}(f) = \text{TF}[R_{y v}(\tau)]$ en fonction de $s_w(f)$, $H_1(f)$ et $H_2(f)$.

- Déduire des résultats précédents, l'expression de la transmittance du filtre annulateur de bruit $G(f)$ en fonction de $s_v(f)$ et de $s_{y v}(f)$. En déduire comment déterminer ce filtre dans la situation pratique où on ne connaît pas les transmittances $H_1(f)$ et $H_2(f)$.

Exercice 2 : Puissance $n^{\text{ème}}$ d'un signal aléatoire (4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que la fonction d'autocorrélation du signal $y_n(t) = x^n(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$ notée $R_n(\tau)$ est une fonction polynomiale de degré n de $R_x(\tau)$.

1. Déterminer $R_{y_2}(\tau)$ pour $n = 2$ à une constante additive près et en déduire que le résultat est vrai pour $n = 2$.
2. On suppose que la fonction d'autocorrélation de $y_n(t)$ est

$$R_n(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k R_x^k(\tau).$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation de $y_{n+1}(t)$ en fonction des coefficients a_k , de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive K .

3. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 , on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E[Z^{2n}] = [(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

Déterminer la constante additive K en fonction des coefficients a_k et de $R_x(0)$.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	\Leftrightarrow	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	\Leftrightarrow	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	\Leftrightarrow	$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

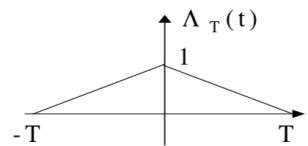
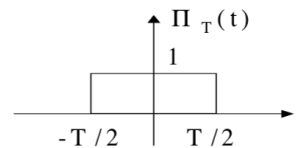
Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$$

avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-a f }$
$e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{a + 2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{(a + 2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$e^{-a^2 t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \operatorname{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \operatorname{sinc}^2(\pi T f)$
$B \operatorname{sinc}(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \operatorname{sinc}^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$