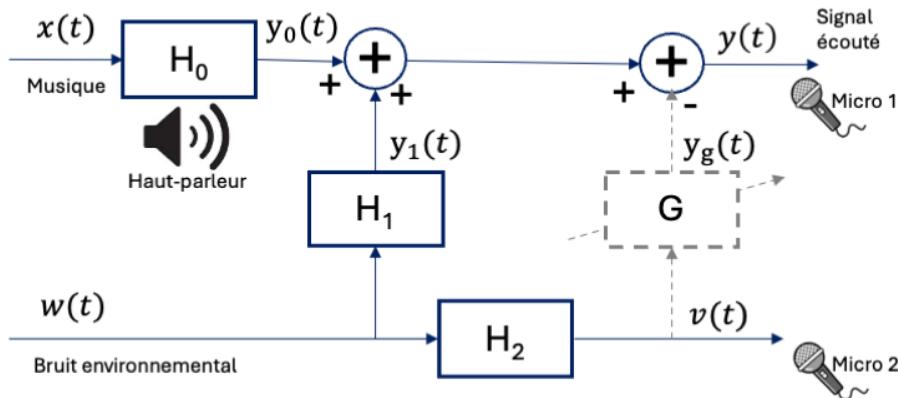


**Exercice 1 : Réduction de bruit (6 points)**

Le schéma de principe d'un casque (écouteur) à réduction de bruit environnemental est décrit ci-dessous. Nous souhaitons écouter de la musique  $x(t)$  transmise sur un haut-parleur au travers d'un filtre de transmittance inconnue  $H_0(f)$  et de réponse impulsionnelle  $h_0(t)$ , mais le signal en sortie du haut-parleur  $y_0(t)$  est perturbé par un bruit additif d'environnement inconnu  $w(t)$ , qui a été filtré par un filtre de transmittance inconnue  $H_2(f)$  et de réponse impulsionnelle  $h_2(t)$ . Nous mesurons le signal reçu par l'oreille  $y(t)$  avec le microphone 1. Un microphone supplémentaire (Micro 2) capte également le signal  $v(t)$  qui est le bruit filtré par un filtre inconnu de transmittance  $H_2(f)$  et de réponse impulsionnelle  $h_2(t)$ .

Nous souhaitons concevoir un filtre  $G(f)$  annulateur de bruit tel que le bruit affectant le signal reçu  $y(t)$  soit parfaitement annulé. Tous les signaux considérés dans cet exercice sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .



1. Le signal reçu par le microphone 1 est  $y(t) = y_0(t) + y_1(t) - y_g(t)$ , où  $y_0(t)$  est le terme dépendant du signal  $x(t)$  et de  $h_0(t)$  (sortie du filtre de transmittance  $H_0$ ),  $y_1(t)$  est le terme dépendant du bruit  $w(t)$  et de  $h_1(t)$ , et enfin  $y_g(t)$  dépend de  $w(t)$ ,  $h_2(t)$  et  $g(t) = \text{TF}^{-1}[G(f)]$ . Déterminer la transmittance idéale  $G(f)$  permettant d'annuler le bruit d'environnement  $y_1(t) - y_g(t)$ .

2. Les signaux  $x(t)$  et  $w(t)$  sont supposés aléatoires stationnaires de densités spectrales de puissance  $s_x(f)$  et  $s_w(f)$ . On suppose également que le bruit  $w(t)$  est de moyenne nulle et que les signaux  $x(t)$  et  $w(t)$  sont indépendants.

- Déterminer  $s_v(f)$  en fonction de  $H_2(f)$  et  $s_w(f)$ .
- On rappelle que d'après la formule des interférences, si  $y_1(t) = w(t) * h_1(t)$  et  $y_2(t) = w(t) * h_2(t)$  alors

$$s_{y_1 y_2}(f) = \text{TF}[R_{y_1 y_2}(\tau)] = s_w(f) H_1(f) H_2^*(f),$$

où  $R_{y_1 y_2}(\tau) = E[y_1(t)y_2(t - \tau)]$  est la fonction d'intercorrélation entre les signaux  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . En l'absence du filtre annulateur  $G$ , montrer que  $R_{yv}(\tau) = E[y(t)v(t - \tau)] = E[y_1(t)v(t - \tau)]$ , où  $y_1(t)$  et  $v(t)$  ont été définis ci-dessus. En déduire  $s_{yv}(f) = \text{TF}[R_{yv}(\tau)]$  en fonction de  $s_w(f)$ ,  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$ .

- Déduire des résultats précédents, l'expression de la transmittance du filtre annulateur de bruit  $G(f)$  en fonction de  $s_v(f)$  et de  $s_{yv}(f)$ . En déduire comment déterminer ce filtre dans la situation pratique où on ne connaît pas les transmittances  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$ .

### Exercice 2 : Puissance $n$ ème d'un signal aléatoire (4 points)

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . L'objectif de cet exercice est de montrer que la fonction d'autocorrélation du signal  $y_n(t) = x^n(t)$  avec  $n \in \mathbb{N}$  notée  $R_n(\tau)$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  de  $R_x(\tau)$ .

1. Déterminer  $R_{y_2}(\tau)$  pour  $n = 2$  à une constante additive près et en déduire que le résultat est vrai pour  $n = 2$ .
2. On suppose que la fonction d'autocorrélation de  $y_n(t)$  est

$$R_n(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k R_x^k(\tau).$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation de  $y_{n+1}(t)$  en fonction des coefficients  $a_k$ , de  $R_x(\tau)$  et d'une constante additive  $K$ .

3. On rappelle que pour une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$E[Z^{2n}] = [(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

Déterminer la constante additive  $K$  en fonction des coefficients  $a_k$  et de  $R_x(0)$ .

## Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

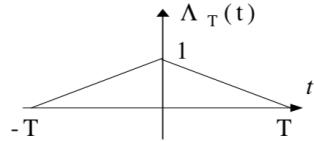
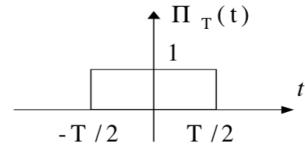
T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\Rightarrow$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\Rightarrow$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \text{Re } \{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im } \{X(f)\} \text{ impaire} \\  X(f)  \text{ pair} \\ \arg \{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\Rightarrow$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\Rightarrow$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Rightarrow$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\Rightarrow$	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\Rightarrow$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\Rightarrow$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\Rightarrow$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\Rightarrow$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$	$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}}  x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}}  X(f) ^2 df$	avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

$1$	$\Rightarrow$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\Rightarrow$	$1$
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Rightarrow$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\Rightarrow$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	$\Rightarrow$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$	$\Rightarrow$	$e^{-a f }$
$e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{a + 2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{(a + 2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\Rightarrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$e^{-a^2 t^2}$	$\Rightarrow$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\Rightarrow$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\Rightarrow$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\Rightarrow$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\Rightarrow$	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$  est de support égal à  $T$ .  
 $\Lambda_T(t)$  est de support égal à  $2T$   
et on a  $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$