EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1TR

Mercredi 7 Janvier 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Échantillonnage d'un signal périodique

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A est une amplitude réelle positive et $f_0 = 5$kHz. On échantillonne ce signal à la fréquence $f_e = 1/T_e$ pour obtenir

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

1. Déterminer les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $x_e(t)$ notées $X(f)$ et $X_e(f)$ et montrer que $X_e(f)$ s'obtient par périodisation de $X(f)$.
2. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $f_e = 100$kHz et lorsque $f_e = 8$kHz.
3. On filtre le signal $x_e(t)$) l'aide d'un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/2$ pour obtenir le signal $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$ avec

$$H(f) = \text{TF}[h(t)] = \frac{1}{f_e}\Pi_{f_e}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \text{ si } -\frac{f_e}{2} \leq f \leq \frac{f_e}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   En s'aidant des résultats de la question précédente, déterminer l'expression du signal $x_r(t)$ dans les deux cas $f_e = 100$kHz et $f_e = 8$kHz.
4. Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ?

Exercice 2: Détection d'un signal aléatoire

L'objectif de cet exercice est de détecter la présence d'un signal aléatoire $x(t)$ à partir de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis comme suit

$$x_1(t) = [x(t) + b_1(t)] * h_1(t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = [x(t) + b_2(t)] * h_2(t)$$

où $b_1(t), b_2(t)$ et $x(t)$ sont trois signaux aléatoires stationnaires indépendants deux à deux représentant respectivement le bruit associé au signal x_1, le bruit associé au signal x_2 et le signal d'intérêt, et où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont les réponses impulsionnelles de deux filtres linéaires (invariants dans le temps). On suppose également que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont stationnaires de moyennes nulles, c'est-à-dire $E[b_1(t)] = E[b_2(t)] = 0$. Pour détecter la présence du signal $x(t)$, on propose de multiplier les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour former le signal $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ et ensuite de filtrer $z(t)$ à l'aide d'un filtre moyenneur pour obtenir le signal $m(t)$ défini comme suit

$$m(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} z(u)du.$$

1. On commence par étudier l'opération de filtrage par moyennage qui transforme $z(t)$ en $m(t)$ et on suppose que $z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

- Justifier que l'opération reliant $z(t)$ et $m(t)$ est une opération de filtrage linéaire.
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$ de ce filtre.
- Déterminer la moyenne de $m(t)$ en fonction de $m_z = E[z(t)]$.
- Déterminer la puissance du signal $m(t)$ sous la forme d'une intégrale d'une fonction dépendant de $s_z(f)$ et de T.

Pour étudier la moyenne et la puissance de $m(t)$, on a donc besoin de déterminer $E[z(t)]$ et $s_z(f)$, ce qui est l'objet de la prochaine question.

2. Pour commencer, on suppose que $x(t) = 0$ (absence de signal d'intérêt).
   - Déterminer la moyenne du signal $z(t)$.
   - Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $z(t)$ en fonction de celles de $x_1(t) = b_1(t) * h_1(t)$ et $x_2(t) = b_2(t) * h_2(t)$.
   - En supposant que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont des bruits blancs de densités spectrales de puissance $s_{b_1}(f) = N_1$ et $s_{b_2}(f) = N_2$, en déduire la densité spectrale de puissance $s_z(f)$ (sous forme intégrale) en fonction de N_1, N_2, $H_1(f)$ et $H_2(f)$. Que devient cette expression de $s_z(f)$ lorsque
   $$H_1(f) = H_2(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
   avec $F > 0$.

3. Dans un second temps, on suppose que le signal d'intérêt est présent, c'est-à-dire que $x(t) \neq 0$.
   - On suppose d'abord que $b_1(t) = b_2(t) = 0$ (absence de bruit). En utilisant un résultat du cours (à préciser), expliquer pourquoi la fonction d'intercorrélation des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (définis au début de cet exercice) s'écrit
   $$R_{x_1x_2}(\tau) = E[x_1(t)x_2^*(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\tau} H_1(f)H_2^*(f)s_x(f)df.$$
   - Expliquer pourquoi ce résultat reste valable en présence de bruit, c'est-à-dire pour $b_1(t) \neq 0$ et $b_2(t) \neq 0$.
   - En déduire la moyenne de $z(t)$ sous la forme d'une intégrale dépendant de $H_1(f)$, $H_2(f)$ et $s_x(f)$. On suppose que $x(t)$ est un signal de puissance P_x de densité spectrale de puissance à bande limitée $[-F/2, F/2]$ et que les filtres $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont définis comme à la question précédente. Montrer alors que $E[z(t)] = P_x$.
   - Déterminer la moyenne de $m(t)$ en présence (hypothèse H_1) et en l'absence (hypothèse H_0) du signal $x(t)$ et expliquer comment détecter la présence ou l'absence du signal $x(t)$ à l'aide de la sortie du filtre moyenneur $m(t)$.

Transformée de Fourier

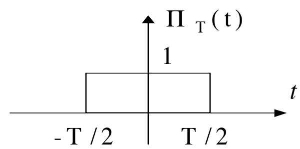
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

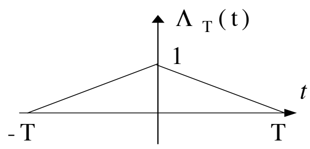
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0)*f(t) = f(t-t_0)$$

3