EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1TR

Mercredi 13 Janvier 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Formulaire

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

Exercice 1: Estimation d'une fonction d'autocorrélation (10 points)

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A est une amplitude réelle positive et f_0 est une fréquence (également positive).

1. Déterminer la fonction d'autocorrélation, la puissance et la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ que l'on notera respectivement $R_X(\tau)$, P_x et $s_x(f)$.

2. En pratique, on ne peut observer le signal $x(t)$ que sur une durée finie T et donc on a uniquement accès au signal $x_T(t) = x(t)\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ (où $\Pi_T(t)$ est définie dans les tables). A quelle classe de signaux appartient le signal $x_T(t)$? Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $x_T(t)$ notée $R_T(\tau)$ (on fera le calcul pour $\tau > 0$ et on utilisera la parité de $R_T(\tau)$). On construit l'estimateur

$$\widehat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}R_T(\tau).$$

Montrer que $\widehat{R}_x(\tau)$ se décompose sous la forme $R_1(\tau) + R_2(\tau)$ avec

$$R_1(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\Lambda_T(\tau)$$

où la fonction triangle $\Lambda_T(\tau)$ est définie par (voir aussi tables)

$$\Lambda_T(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} \text{ si } |\tau| < T \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $R_1(\tau)$ et $R_2(\tau)$ tendent respectivement vers $R_X(\tau)$ et 0 lorsque T tend vers $+\infty$.

3. On suppose que T est suffisamment grand pour avoir $\widehat{R}_x(\tau) \approx R_1(\tau)$.

   - En déduire une expression approchée de $s_x(f)$ définie par $\widehat{s}_x(f) = s_1(f)$ où $s_1(f) = \text{TF}[R_1(\tau)]$. Représenter graphiquement $s_x(f)$ et $\widehat{s}_x(f)$.
   - On désire estimer la puissance du signal $x(t)$ à partir de $s_1(f)$. Quel estimateur $\widehat{P}_x$ proposez-vous ? Calculer $\widehat{P}_x$ dans le cas du signal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

Exercice 2: Détection d'un signal aléatoire stationnaire (10 points)

L'objectif de cet exercice est de détecter la présence d'un signal aléatoire stationnaire $s(t)$ à partir de l'observation de $x(t) = s(t) + b(t)$, où $b(t)$ est un bruit additif Gaussien supposé aléatoire stationnaire indépendant de $s(t)$. On supposera dans cet exercice que $b(t)$ est de moyenne nulle et on notera $R_b(\tau)$ et $s_b(f)$ la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $b(t)$. Pour détecter la présence du signal $s(t)$, on propose d'utiliser un quadrateur qui permet de construire le signal $y(t) = x^2(t)$, puis de filtrer $y(t)$ à l'aide d'un filtre moyenneur pour obtenir le signal $z(t)$ défini par

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} y(u)du.$$

1. On commence par étudier l'opération de filtrage par moyennage qui transforme $y(t)$ en $z(t)$ et on suppose que $y(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

   - Justifier que l'opération reliant $z(t)$ et $y(t)$ est une opération de filtrage linéaire.
   - Déterminer la transmittance $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce filtre.
   - Déterminer la moyenne de $z(t)$ en fonction de $m_y = E[y(t)]$.
   - Déterminer la puissance du signal $z(t)$ sous la forme d'une intégrale d'une fonction dépendant de $s_y(f)$ et de T.

   Pour étudier la moyenne et la puissance de $z(t)$, on a donc besoin de déterminer $E[y(t)]$ et $s_y(f)$, ce qui est l'objet de la prochaine question.

2. En utilisant le fait que $y(t) = x^2(t)$, déterminer la moyenne de $y(t)$ sous les hypothèses H_0 et H_1 définies comme suit

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad x(t) = b(t) \\ H_1 &: \quad x(t) = s(t) + b(t). \end{aligned}$$

3. En utilisant le théorème de Price, déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ sous l'hypothèse H_0. En déduire $s_y(f)$ et la puissance du signal $y(t)$ sous l'hypothèse H_0, lorsque $b(t)$ possède la densité spectrale $s_b(f) = \Pi_\Delta(f)$.

4. La performance de la procédure de détection décrite dans cet exercice peut se mesurer à l'aide d'un critère appelé "déflation" défini comme suit

$$D = \frac{E[z(t)|H_1] - E[z(t)|H_0]}{\sqrt{\text{Var}[z(t)|H_0]}}$$

   Montrer que

$$D = \frac{P_s}{\sqrt{2\Delta \int_{\mathbb{R}} \Lambda_\Delta(f) \text{sinc}^2(\pi f T) df}}$$

Transformée de Fourier

$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$$

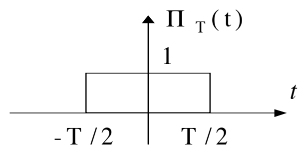
Série de Fourier

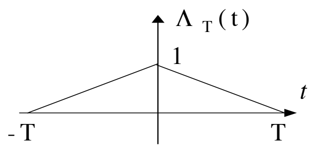
$$x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$$

avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0)*f(t) = f(t-t_0)$$

3