
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Jeudi 18 Janvier 2018

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

Pour $f_0 > 0$, on considère un signal déterministe

$$x(t) = f_0 \left[\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t} \right]^2 = f_0 \text{sinc}^2(\pi f_0 t).$$

1. On échantillonne le signal $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

notée $X_e(f)$. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $F_e = 4f_0$.

2. On construit le signal numérique $y(kT_e)$ de la manière suivante

$$y(kT_e) = \begin{cases} x(kT_e) & \text{si } k \text{ pair} \\ -x(kT_e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$. Montrer que la transformée de Fourier du signal échantillonné $y_e(t)$ est définie par

$$Y_e(f) = X_e\left(f + \frac{F_e}{2}\right).$$

Représenter $Y_e(f)$ pour $F_e = 4f_0$.

3. Comment peut-on restituer le signal $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t) + y_e(t)$ avec $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$?

Exercice 2 : Questions de cours (2 points)

- Qu'appelle-t'on formule d'interpolation de Shannon ? Quel est son intérêt ?
- Qu'est ce qu'un signal stationnaire ?
- Qu'est ce qu'un bruit blanc ?
- Qu'est ce qu'un filtre anti-repliement ? Est-il analogique ou numérique ?

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = \Lambda_1(\tau)$ avec

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 + \tau & \text{si } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on forme le signal aléatoire

$$Y(t) = \int_{t-2}^t X(u) du$$

- Montrer que $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ avec un filtre dont on déterminera la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.
- Montrer que la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ s'écrit

$$s_Y(f) = \frac{[1 - \cos(2\pi f)] [(1 - \cos(4\pi f))]}{4\pi^4 f^4}$$

On rappelle la relation $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

T.F.

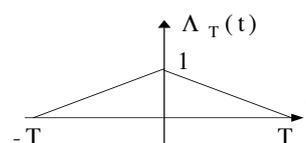
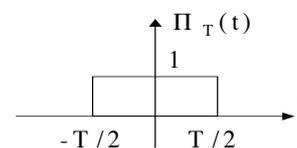
$x(t)$ réelle paire	\Leftrightarrow	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	\Leftrightarrow	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \text{arg}\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f) e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t) e^{+i2\pi ft_0}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$