EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Mardi 15 Janvier 2019

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Analyse Spectrale (3 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp\left[j2\pi(A + Bt))\right]$$

où A et B sont deux deux constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

1. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ? à puissance finie périodique ? ou à puissance finie non-périodique ?

2. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$.

Exercice 2 : Filtrage (3 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ définie par

$$s_x(f) = \pi_F(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et on construit le signal $y(t) = x(t) + ax(t - t_0)$, où a et t_0 sont deux constantes positives.

1. Montrer que $y(t)$ peut être obtenu par filtrage du signal $x(t)$ par un filtre dont déterminera la transmittance.

2. Déterminer la densité spectrale de puissance de $y(t)$.

3. Quelle est la puissance du signal $y(t)$?

Exercice 3 : Questions de Cours (4 points)

1. Comment calcule-t-on la puissance à partir de la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire ?

2. L'opération qui au signal $x(t)$ associe le signal $y(t) = x(0)$ est-elle une opération de filtrage linéaire ? (justifier votre réponse)

3. Déterminer la transmittance du filtre associant au signal $x(t)$ sa dérivée seconde $y(t) = x''(t)$.

4. Que montre la formule des interférences lorsqu'un même signal est transmis dans deux canaux disjoints $H_1(f)$ et $H_2(f)$?

5. A quoi sert la formule d'interpolation de Shannon ?

6. On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 5$Hz à la fréquence $f_e = 6$Hz. Représenter la transformée du signal échantillonné dans la bande de fréquence $[0, 16\text{Hz}]$.

7. Un filtre anti-repliement est-il analogique ou numérique ?

8. Donner la démarche à suivre pour calculer la densité spectrale de puissance de $y(t) = g[x(t)]$, où g est une transformée non-linéaire et $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire Gaussien de moyenne nulle.

Transformée de Fourier

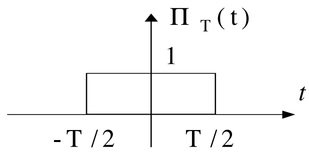
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

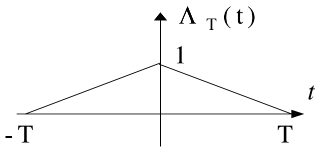
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t) = \delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0) * f(t) = f(t-t_0)$$