
EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Jeudi 16 janvier 2020 (8h30-9h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp [j(2\pi ft + \phi)]$$

où f est une variable aléatoire de densité $p(f)$ et ϕ est une phase constante appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1. Exprimer la moyenne du signal $x(t)$ en fonction de ϕ et de la transformée de Fourier inverse de $p(f)$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire ? Calculer la moyenne de $x(t)$ dans les deux cas suivants

- f est uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$, où f_0 et Δf sont des constantes telles que $f_0 > \Delta f$
- la densité de probabilité de f est gaussienne autour de la fréquence f_0 , i.e.,

$$p(f) = \exp[-\pi(f - f_0)^2], \quad f \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$ dans le cas où f est uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ avec $f_0 > \Delta f$.

Exercice 2 (3 points)

Un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ doit être transmis dans un canal représenté par un bruit additif stationnaire $b(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_b(f)$. Afin d'améliorer le rapport signal sur bruit, on introduit un filtre à l'émission appelé filtre de préaccentuation de transmittance $H_p(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_p(t)$. Afin de compenser l'effet de ce filtre, on introduit dans le récepteur un filtre appelé filtre de désaccentuation de transmittance $H_d(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_d(t)$. Le système général est représenté ci-dessous

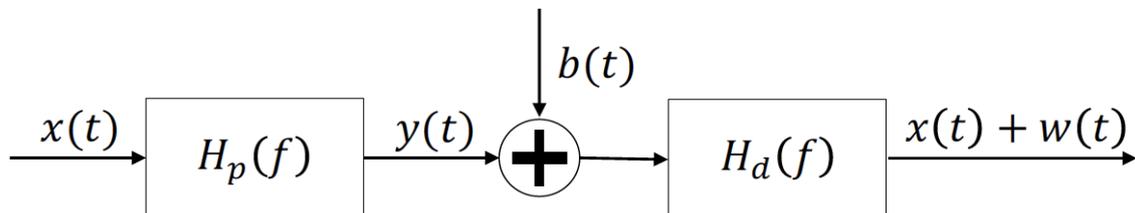


Figure 1: Système de préaccentuation/désaccentuation.

1. Déterminer la puissance du signal $y(t)$ notée P_y en fonction de $H_p(f)$ et de $s_x(f)$.
2. Quelle relation doit-il y avoir entre $H_p(f)$ et $H_d(f)$ pour que la sortie du système s'écrive $s(t) = x(t) + w(t)$ avec $w(t) = b(t) * h_d(t)$, où $*$ désigne le produit de convolution. On supposera que cette relation est vérifiée dans la suite de cet exercice.

3. On admet que le filtre $H_d(f)$ minimisant la puissance de $w(t)$ pour une puissance $P_y = P_0$ donnée est tel que

$$|H_d(f)|^2 = \sqrt{\lambda \frac{s_x(f)}{s_b(f)}}$$

avec $\lambda > 0$. En utilisant la relation $P_y = P_0$, exprimer $\sqrt{\lambda}$ en fonction de P_0 , $s_x(f)$ et $s_b(f)$.

4. En déduire le module carré de la transmittance du filtre de désaccentuation $|H_d(f)|^2$ en fonction de P_0 , $s_x(f)$ et $s_b(f)$.

Exercice 3 (4 points)

On considère un filtre non-linéaire qui transforme un signal aléatoire $X(t)$ en un signal aléatoire $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

On supposera dans cet exercice que $X(t)$ est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = [X(t), X(t - \tau)]$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T \right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où Σ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de Σ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. Exprimer l'autocorrélation du signal $Y(t)$ en fonction de la loi de $(U, V) = [X(t), X(t - \tau)]$ et en déduire qu'elle ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.
2. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$ et d'une constante additive notée C .

Rappel : on pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours)

$$E [X^2(t)X^2(t - \tau)] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation suivante

$$m_{2n} = E [X^{2n}(t)] = [(2n - 1)(2n - 3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] R_X^n(0)$$

En déduire la valeur de C .

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

T.F.

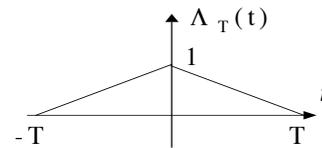
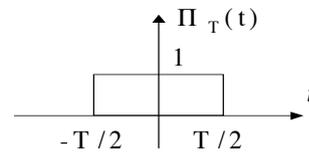
$x(t)$ réelle paire	\Leftrightarrow	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	\Leftrightarrow	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f) e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .
 $\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
 et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$