Examen Traitement du Signal - 1SN

Lundi 11 janvier 2021 (10h00-11h00)

Partiel sans document
(Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Durée : 1 heure

1 Exercice 1 : Multiplexage de signaux

On considère le signal $\mathbf{x}(t)$ défini comme suit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\cos(2\pi f_0 t) + \mathbf{B}\sin(2\pi f_0 t),$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires stationnaires au sens large (ie. stationnaires à l'ordre 1 et 2). On va s'intéresser aux conditions nécessaires et suffisantes sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ garantissant la stationnarité au sens large du signal $\mathbf{x}(t)$.

1. **Stationnarité au premier ordre :**
   (a) Calculer $\mathbb{E}(\mathbf{x}(t))$.
   (b) En déduire que pour avoir $\mathbf{x}(t)$ stationnaire à l'ordre 1, nécessairement, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires centrées (ie. de moyenne nulle). On considérera cette propriété vraie par la suite.
2. **Stationnarité au second ordre :**
   (a) Calculer $\mathbb{E}((\mathbf{x}(0))^2)$ et $\mathbb{E}((\mathbf{x}(\frac{1}{4f_0}))^2)$ en fonction des moments d'ordre 2 de A et B. Que devraient vérifier ces deux quantités si on suppose le signal stationnaire à l'ordre 2 ? En déduire la condition nécessaire sur les variances de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour avoir la stationnarité à l'ordre 2.
   (b) Calculer alors $\mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau))$. En déduire la condition supplémentaire à vérifier par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour avoir $\mathbf{x}(t)$ stationnaire à l'ordre 2. On utilisera les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
\sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\
\sin a \cos b &= \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\
\cos a \sin b &= \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]
\end{aligned}$$

3. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{x}(t)$ est stationnaire au sens large si et seulement si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires centrées, de même variance et décorrélées. Donner alors les expressions de l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance associées à $\mathbf{x}(t)$.

2 Exercice 2 : Cascade filtre non linéaire et linéaire

Pour estimer la puissance moyenne d'un signal aléatoire $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, Gaussien centré et d'autocorrélation $R_x(\tau)$, on utilise un filtrage en cascade composé d'un quadrateur suivi d'un filtrage linéaire par un filtre passe-bas $h(t)$. On suppose également que la densité spectrale de puissance du signal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ est

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}\Pi_{2B}\left(f\right).$$

2.1 Etude du quadrateur

Soit $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = |\mathbf{x}(\mathbf{t})|^2$, le processus en sortie du premier étage du dispositif.

1. Calculer de manière directe l'expression $m_y = \mathbb{E}(\mathbf{y}(t))$. Conclure sur la stationnarité à l'ordre 1.
2. En appliquant le théorème de Price, montrer que l'on doit vérifier l'équation suivante
$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + K,$$
où K une constante à déterminer.
3. En utilisant, l'expression des moments d'une loi gaussienne centrée X
$$E\left(X^{2n+1}\right) = 0,\ E\left(X^{2n}\right) = [(2n-1)\times(2n-3)...\times 3\times 1]\sigma^{2n},$$
déterminer la constante K. En déduire que
$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + |m_y|^2.$$
4. Conclure sur la stationnarité à l'ordre 2.

2.2 Estimateur par filtrage linéaire

Le signal en sortie de quadrateur est ensuite filtré par un filtre linéaire invariant par décalage de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de gain fréquentiel $H(f) = TF(h(t))$. On note $\mathbf{z}(t) = h(t) * \mathbf{y}(t)$.

1. Que pouvez vous dire de la stationnarité du signal $\mathbf{z}(t)$?
2. Quelle condition doit vérifier le filtre $h(t)$ pour garantir $m_z = \mathbb{E}(\mathbf{z}(t)) = \sigma_x^2$? On souhaite utiliser le filtre de gain fréquentiel
$$H(f) = \Pi_{2b}\left(f\right), b < B.$$
Vérifie-t-on la condition précédente ? Justifier.
3. En utilisant le filtre précédent, la sortie du filtre peut-être vue comme un estimateur aléatoire instantané non biaisé de σ_x^2. Quelle est la valeur de $m_z = \sigma_x^2$ en fonction de N_0 et B?

4. Pour étudier le comportement de cet estimateur et l'influence du paramètre b du filtre, on va étudier sa fluctuation déterminée par la variance de $\mathbf{z}(t)$. On doit donc étudier

$$\sigma_z^2 = \mathbb{E}(|\mathbf{z}(t) - m_z|^2).$$

Comme $\mathbf{y}(t)$ est non centré, $\mathbf{z}(t)$ ne l'est pas également. Pour calculer cette quantité facilement, on peut montrer que l'étude des relations entrées-sorties peut se ramener à l'étude des propriétés d'autocorrélation des processus centrés $\tilde{y}(t) = \mathbf{y}(t) - m_y$ et $\tilde{z}(t) = \mathbf{z}(t) - m_z = h(t) * \tilde{y}(t)$. On obtient alors

$$\sigma_z^2 = \sigma_{\tilde{z}}^2 = R_{\tilde{z}}(0).$$

En remarquant que

$$R_{\tilde{y}}(\tau) = R_y(\tau) - |m_y|^2,$$

donner l'expression de $R_{\tilde{y}}$ en fonction de $R_x(\tau)$. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance associée $S_{\tilde{y}}(f)$ en fonction de B et N_0.

5. Donner l'expression de

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 = R_{\tilde{z}}(0) = \int_{\mathbb{R}} S_{\tilde{z}}(f) df$$

en fonction de B, b et N_0. Si $b << B$, déduire que

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 \approx 2BbN_0^2.$$

6. en déduire l'écart relatif de fluctuation donné par σ_z/m_z en fonction du ratio b/B. Conclure.

3 Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f - nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$$