EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 10 janvier 2022 (10h00-11h00)

*Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)*

**Exercice 1 : un simple cosinus ($2$ points)**

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \cos(3\pi t).$$

Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$.
*On rappelle la formule trigonométrique suivante :* $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

**Exercice 2 : différence de deux intégrateurs ($5$ points)**

On considère un signal aléatoire réel stationnaire $X(t)$ de moyenne $m = E[X(t)]$, de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$ et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. Pour $T > 0$, on construit le signal aléatoire $Y(t)$ comme suit

$$Y(t) = \int_t^{t+T} X(u)du - \int_{t-T}^{t} X(u)du.$$

1. Montrer que l'opération liant $X(t)$ et $Y(t)$ est une opération de filtrage linéaire (invariant dans le temps) et que la transmittance de ce filtre s'écrit $H(f) = 2jT\text{sinc}(\pi f T)\sin(\pi f T)$. Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ associée à $H(f)$.

2. Déterminer la moyenne du signal $Y(t)$ et la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.

3. Expliquer l'utilité pratique du filtre liant $X(t)$ et $Y(t)$.

**Exercice 3 : écrêtage doux ($4$ points)**

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à écrêtage

$$g(x) = \frac{1}{2K}\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_d}\right) \quad \text{avec} \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du.$$

On l'applique à un signal gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorélation notée $R_X(\tau)$

$$Y(t) = g[X(t)].$$

On rappelle que pour un tel signal, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u,v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple $(U, V)$ définie par

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U,V) \\ \text{cov}(U,V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de $\boldsymbol{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2. On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$, on a

$$E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t)+X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2}\right]\right\} = \frac{\sigma_d^2}{\sqrt{\left(\sigma_d^2+R_X(0)\right)^2 - R_X^2(\tau)}}$$

   et on rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\left(\frac{u}{|a|}\right),\ a \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que $g'(x) = \frac{1}{K\sigma_d\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right)$. En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près notée $C$ qu'on supposera nulle.

3. Montrer que la fonction autocorrélation normalisée du signal $Y(t)$ notée $\rho_Y(\tau)$ vérifie

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\arcsin\left(\frac{\rho_X(\tau)}{1+\alpha}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$$

   avec $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{R_X(0)}$ et $\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$.

*Remarque* : ce résultat est issu l'article de R. F. Baum intitulé "The Correlation Function of Smoothly Limited Gaussian Noise" publié dans la revue IRE Transactions on Information Theory en septembre 1957 (vol. 3, no. 3).

## Transformée de Fourier

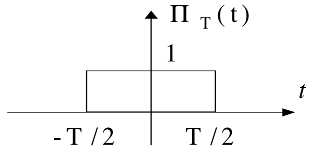
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

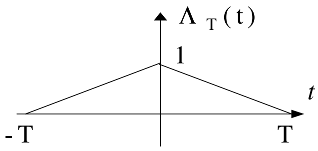
| | T.F. | |
|---|---|---|
| $x(t)$ réelle paire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ réelle paire |
| $x(t)$ réelle impaire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ imaginaire pure impaire |
| $x(t)$ réel | $\rightleftharpoons$ | $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$ |
| $ax(t) + by(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $aX(f) + bY(f)$ |
| $x(t - t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f) e^{-i2\pi f t_0}$ |
| $x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f - f_0)$ |
| $x^*(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X^*(-f)$ |
| $x(t) \ . \ y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f) * Y(f)$ |
| $x(t) * y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f) \ . \ Y(f)$ |
| $x(at)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| $\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$ | $\rightleftharpoons$ | $(i2\pi f)^n X(f)$ |
| $(-i2\pi t)^n x(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$ |

| Formule de Parseval |
|---|
| $\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$ |
| $\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$ |

| Série de Fourier |
|---|
| $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$ |
| avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$ |

| | T.F. | |
|---|---|---|
| $1$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $1$ |
| $e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f - f_0)$ |
| $\delta(t - t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-i2\pi f t_0}$ |
| $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ |
| $\cos(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$ |
| $\sin(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert}$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$ |
| $e^{-\pi t^2}$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-\pi f^2}$ |
| $\Pi_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$ |
| $\Lambda_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T \sin c^2(\pi T f)$ |
| $B \sin c(\pi B t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Pi_B(f)$ |
| $B \sin c^2(\pi B t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Lambda_B(f)$ |




**!!!!!! Attention !!!!!**

$\Pi_T(t)$ est de support égal à $T$.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$