Examen Traitement du Signal - 1SN

Lundi 11 janvier 2021 (10h00-11h00)

Partiel sans document
(Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Durée : 1 heure

1 Exercice 1 : Stationnarité de deux signaux modulés en amplitude

Soit $X(t)$ un processus stochastique réel stationnaire aux premier et second ordres (mais non nécessairement centré). On notera $R_X(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation et $m_X = E[X(t)]$ sa moyenne. On considère maintenant les deux processus stochastiques suivants :

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$
$$Z(t) = X(t)\cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi)$$

où f_0 et Δf sont des constantes et φ une variable aléatoire indépendante de $X(t)$ et uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

On rappelle les relations suivantes :

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos(\tfrac{a+b}{2})\cos(\tfrac{a-b}{2})$$

Montrer que :

1. $Y(t)$ et $Z(t)$ sont deux processus stochastiques stationnaires au second ordre.
2. Le processus défini par $H(t) = Y(t) + Z(t)$ est-il un processus stationnaire au second ordre ? Si non, à quelle condition peut-il le devenir ?

2 Exercice 2 : Filtre dérivateur d'ordre n

2.1 Filtre dérivateur

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire au sens large (aux ordres 1 et 2) et

$$y(t) = x'(t).$$

On notera $m_x = \mathbb{E}(x(t))$ et $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x^*(t-\tau))$ la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

1. Montrer que
$$y(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = h(t) * x(t)$$
où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire invariant par décalage, appelé filtre dérivateur, de gain fréquentiel $H(f) = j2\pi f$.
2. Déterminer la moyenne de $y(t)$.
3. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance de $\mathbf{y}(t)$ en fonction de celle de $\mathbf{x}(t)$, notée $S_x(f) = \mathrm{TF}(R_x(\tau))$.
4. En remarquant que pour le filtre $h(t)$, on a
$$H^*(f) = TF(h^*(-t)) = -H(f),$$
en déduire par transformation de Fourier inverse (voir tables), l'expression de l'autocorrélation de $\mathbf{y}(t)$ en fonction de celle de $\mathbf{x}(t)$.
5. Rappeler le lien entre la fonction d'intercorrélation entrée-sortie $R_{\mathbf{yx}}(\tau) = \mathbb{E}(y(t)x^*(t-\tau))$ et les fonction $h(t)$ et $R_{\mathbf{x}}(\tau)$. En déduire une relation entre $R_{\mathbf{yx}}(\tau)$ et $S_x(f)$. En déduire que $R_{yx}(\tau) = R'_x(\tau)$.

2.2 Filtre dérivateur d'ordre n

1. On souhaite généraliser ces résultats à la dérivation d'ordre n. Soit $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{d^{(n)}}{dt^n}x(t)$. Déduire de ce qui précède l'expression de la densité spectrale de puissance de $\tilde{\mathbf{y}}(t)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation de $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ est donnée par
$$R_{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{(2n)}}{d\tau^{2n}} R_{\mathbf{x}}(\tau).$$

2.3 Application : bruit blanc Gaussien à bande étroite

On considèrera ici que $\mathbf{x}(t)$ est un processus aléatoire réel Gaussien, centré et stationnaire au sens large de densité spectrale de puissance constante sur la bande $[-B, B]$. On parle alors de bruit blanc Gaussien à bande étroite. La densité spectrale de puissance de $\mathbf{x}(t)$ est donnée par

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2}\Pi_{2B}\left(f\right).$$

On notera l'autocorrélation correspondante par $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x(t-\tau))$.

1. Donner l'expression de $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x(t-\tau))$.
2. Exprimer la densité de probabilité de $x(t)$ et celle du couple $(x(t), x(t-\tau))$ (préciser les valeurs des paramètres des deux lois).
3. On considère maintenant le processus $y(t) = x'(t)$. En considérant les résultats précédents, en déduire que $y(t)$ est un processus Gaussien dont on donnera la moyenne $\mathbb{E}(x'(t))$ et la variance $\mathbb{E}(|x'(t)|^2)$. Donner également les paramètres pour la densité conjointe de $(y(t), y(t-\tau))$.

3 Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\,Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$