EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 19 février 2024, 8h30-9h30.

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (3 points)

On considère le signal aléatoire complexe

$$X(t) = Ae^{i\lambda t} + Be^{i\mu t}$$

où A et B sont deux variables aléatoires à valeurs réelles de moyennes nulles, de variances égales à 1 et de covariance nulle, i.e., $\text{cov}(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] = E[AB] = 0$, et où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes telles que $\lambda \neq \mu$. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

Exercice 2 (3 points)

On considère un signal aléatoire réel stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. On construit le signal aléatoire

$$Y(t) = X(t) + aX(t-d), \ a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}.$$

- Montrer que le signal $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la transmittance $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$.
- Déterminer la densité spectrale de puissance $s_Y(f)$ et la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ du signal $Y(t)$ en fonction de $s_X(f)$ et de $R_X(\tau)$.
- Déterminer la puissance du signal $Y(t)$ notée P_Y et montrer que $P_Y \leq P_X(1+a)^2$, où P_X est la puissance du signal $X(t)$.

Exercice 3 : Théorème de Bussgang (4 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$

$$Y(t) = g\left[X(t)\right] = X^3(t)$$

et on s'intéresse à l'intercorrélation entre $Y(t)$ et $X(t-\tau)$ notée $R_{YX}(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\mathbf{\Sigma}}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u, v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'intercorrélation $R_{YX}(\tau) = E[Y(t)X(t-\tau)]$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.

2. On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = g[X(t)]$, $X_2 = X(t-\tau]$ et $Y_2 = X(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$ et en déduire $R_{YX}(\tau)$ en fonction de $\mathbb{R}_X(\tau)$ à une constante additive près notée C.

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation

$$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)\,(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] R_X^n(0).$$

   En déduire la constante additive C.

4. Vérifier la valeur obtenue de la constante C en calculant $\lim_{\tau \to \infty} R_{YX}(\tau)$ quand $\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = 0$.

Transformée de Fourier

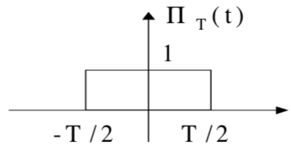
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

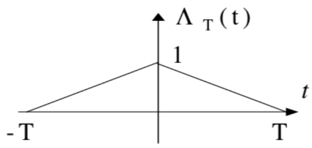
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-a^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2f^2}{a^2})$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t\neq 0\\ +\infty \text{ si } t=0\end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t-t_0)\,f(t)=\delta(t-t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$$