Examen Traitement du Signal - 1SN

Lundi 31 mars 2025 (14h00-15h00)

Partiel sans document
(Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Durée : 1 heure. 5 pages.

1 Exercice 1 : Questions d'application du Cours - 4 points

Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée.

1. Parmi les expressions suivantes, lesquelles pourraient convenir à la définition de l'autocorrélation d'un signal $x(t)$?

   (a) $R_x(\tau) = |\tau| e^{-|\tau|}$

   (b) $R_x(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -T < \tau < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. Soient $x(t)$ le signal d'entrée et $y(t)$ la sortie d'un système à caractériser. On définit alors les relations entrées-sorties pour deux systèmes comme suit :

   (a) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} x^2(u) du, \ \forall t \in \mathbb{R}$

   (b) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-u|} x(u) du, \ \forall t \in \mathbb{R}$

   Que pouvez vous dire des systèmes ainsi définis ? Sont-ils linéaires ? invariants par décalage temporel ? Avec ou Sans Mémoire ? Causaux ?

   Indice : dans le premier cas, interpréter le système comme la cascade en série de deux systèmes que l'on pourra caractériser facilement pour en déduire les caractériques du système complet.

2 Exercice 2 : Cyclostationnarité et stationnarité au sens large - 10 points

On considère le processus suivant

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

où $A(t)$ est un processus aléatoire réel, stationnaire au sens large, centré, de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ et de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$. f_0 est une constante réelle. On rappelle les relations suivantes :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2.1 Caractérisation des propriétés statistiques du processus $X(t)$

1. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire à l'ordre 1 ?
2. Montrer que le signal n'est pas stationnaire à l'ordre 2 et donc que son autocorrélation $\mathbb{E}[X(t)X^*(t-\tau)] = R_x(t;\tau)$ est une fonction dépendante de t et τ.
3. En déduire cependant que $R_x(t;\tau)$ est une fonction périodique en t de période T_0 que l'on précisera.

On dit qu'un processus aléatoire $X(t)$ est cyclostationnaire au sens large, de cyclofréquence $1/T$, si sa moyenne $m_X(t)$ et sa fonction d'autocorélation $R_x(t;\tau)$ sont des fonctions périodiques en t de période T. D'après la définition précédente, $X(t)$ est donc cyclo-stationnaire au sens large de cyclofréquence $1/T_0$.

2.2 Propriétés spectrales du processus $X(t)$

1. Déduire des propriétés de $R_x(t;\tau)$ que $R_x(t;\tau)$ peut se décomposer en série de Fourier sous la forme :

$$R_X(t;\tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_c} C(\alpha,\tau) e^{+j2\pi\alpha t}$$

   où $\mathcal{F}_c \triangleq \{k/T_0; k \in \mathbb{Z}\}$.
   Ainsi, pour τ fixé, $C(k,\tau)$ représente le coefficient de Fourier associé à la *cyclo-fréquence* $\alpha = k/T_0$. Il a donc pour expression :

$$C(\alpha,\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_X(t;\tau)e^{-j2\pi\alpha t}dt$$

2. En utilisant l'expression de $R_x(t;\tau)$, déduire par identification directe des termes de la série de Fourier que seuls trois termes sont non nuls et donnés par :

$$\begin{aligned} C(0,\tau) &= \frac{1}{2}R_A(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) \\ C(-2f_0,\tau) &= \frac{1}{4}R_A(\tau)e^{j2\pi f_0\tau} \\ C(2f_0,\tau) &= \frac{1}{4}R_A(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau} \end{aligned}$$

3. Pour un processus cyclo-stationnaire, on peut définir le *cyclospectre* pour la cyclo-fréquence α par

$$S_X(\alpha,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha,\tau)e^{-2j\pi f\tau}d\tau.$$

   En déduire que le cyclo-spectre est non nul pour $\alpha \in \{-2f_0, 0, +2f_0\}$. Donnez alors les valeurs $S_X(0,f)$, $S_X(-2f_0,f)$ et $S_X(+2f_0,f)$ en fonction de $S_A(f)$.

4. Pour un signal cyclostationnaire, on peut également définir les quantités suivantes qui correspondent aux statistiques (périodiques) d'ordre 1 et 2 moyennées sur une période. On définit ainsi les quantités suivantes :
   - la moyenne est donnée par :

$$\bar{m}_X = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} m_X(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathbb{E}(X(t))dt$$

   - On appelle fonction d'autocorrélation moyenne, la fonction de τ définie par :

$$\bar{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_X(t;\tau)dt = C(0,\tau)$$

   - On appelle densité spectrale de puissance moyenne, la transformée de Fourier de $\bar{R}_X(\tau)$ soit :

$$\bar{S}_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

   En déduire les valeurs de $\bar{m}_X$, $\bar{R}_X(\tau)$ et $\bar{S}_X(f)$ pour notre cas.

2.3 Lien avec les processus stationnaires au sens large

On considère maintenant le processus

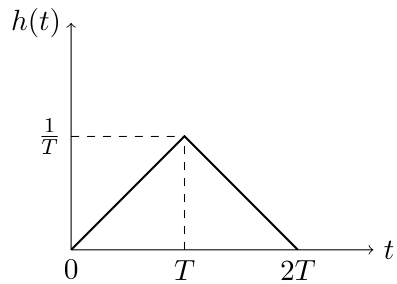
$$X_s(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$$

où $A(t)$ est défini comme précédemment et Φ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ et indépendante du processus aléatoire $A(t)$.

1. Le processus $X_s(t)$ est-il stationnaire à l'ordre 1. Si oui, quelle est alors sa moyenne ?
2. Démontrer que $X_s(t)$ est stationnaire à l'ordre 2 et donner l'expression de $R_{X_s}(\tau) = \mathbb{E}(X_s(t)X_s^*(t-\tau))$.
3. En déduire $S_{X_s}(f) = TF(R_{X_s}(\tau))$.
4. Comparer alors les expressions obtenues à $\bar{m}_X$, $\bar{R}_X$ et $\bar{S}_X(f)$. En déduire que l'ajout d'une phase aléatoire est équivalent à considérer les caractéristiques moyennes d'un signal cyclostationnaire en rendant ses statistiques indépendantes du temps. On parle de "stationnarisation" du signal.

3 Filtrage triangulaire d'un bruit blanc - 6 points

Soit $X(t)$ un processus aléatoire réel à temps continu, stationnaire au sens large, centré, et de densité spectrale de puissance $S_X(f) = (N_0/2)\,\Pi_{2B}(f)$. On filtre ce processus à l'aide d'un filtre linéaire invariant par décalage de réponse impulsionnelle triangulaire donnée par



$$h(t) = \begin{cases} t/T^2 & \text{pour} \quad t \in [0, T] \\ (2T - t)/T^2 & \text{pour} \quad t \in [T, 2T] \\ 0 & \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$$

On note $Y(t)$ la sortie du filtre.

1. Déterminer la puissance $P_X = \mathbb{E}(|X(t)|^2)$ en fonction de N_0 et B.
2. Déterminer l'expression de $H(f) = TF(h(t))$.
3. Le processus $Y(t)$ est-il stationnaire au sens large ? Justifier.
4. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance $S_Y(f)$.
5. Montrer que la puissance en sortie de filtre est donnée par

$$P_Y = \mathbb{E}(|Y(t)|^2) = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^{B} |H(f)|^2 df$$

6. On admettra pour $BT >> 1$ l'approximation suivante :

$$P_Y \approx \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

   En déduire P_Y en fonction de N_0 et T.
   On peut alors à partir de la mesure de puissance de $Y(t)$ évaluer N_0.

4 Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\,X(f)$
$(-i2\pi t)^n\,x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2\,dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2\,df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\,Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$