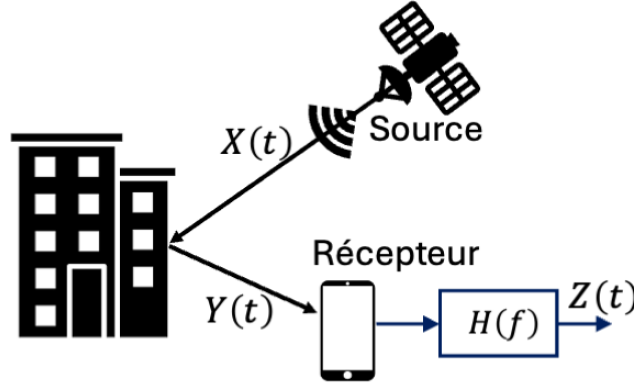

EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 16 février 2025, 8h30-9h30

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Réduction d'interférences (6 points)

On considère le système représenté sur la figure ci-dessous dans lequel le signal $X(t)$ est supposé réel aléatoire stationnaire de moyenne $E[X(t)] = m$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$ et où le signal reçu est $Y(t) = X(t) + aX(t-T)$ avec $0 < a < 1$ et $T > 0$, où T est un retard lié au temps de propagation entre la source et le récepteur et a est un facteur d'atténuation.



- Déterminer la moyenne du signal $Y(t)$, sa fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $s_Y(f)$ en fonction des données du problème. Le signal $Y(t)$ est-il stationnaire ?
- Le signal $X(t-T)$ peut être considéré comme une interférence que l'on cherche à atténuer. On forme le signal $Z(t) = Y(t) - aY(t-T)$. Montrer que $Z(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$. En déduire la densité spectrale de puissance de $Z(t)$ notée $s_Z(f)$ et sa fonction d'autocorrélation $R_Z(\tau)$. Expliquer pourquoi l'interférence est moins visible sur $R_Z(\tau)$ que sur $R_Y(\tau)$.

Exercice 2 : Puissance quatrième d'un signal aléatoire (4 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$Y(t) = g[X(t)] = X^4(t)$$

et on s'intéresse à la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\Sigma}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T \right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où Σ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de Σ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)]$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.
2. On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal $X^3(t)$ est définie par $R_3(\tau) = 6R_X^3(\tau) + 9R_X^2(0)R_X(\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près notée C .
3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] R_X^n(0).$$

En déduire la constante additive C .

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

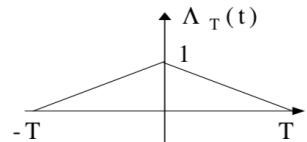
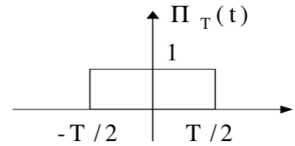
T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\Leftrightarrow$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\Leftrightarrow$	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\Leftrightarrow$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$	$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$	avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	$\Leftrightarrow$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\Leftrightarrow$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	$\Leftrightarrow$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$	$\Leftrightarrow$	$e^{-a f }$
$e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{a + 2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{(a + 2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\Leftrightarrow$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-a^2 t^2}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$\Pi_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \operatorname{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \sin^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_B(f)$
$B \sin^2(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$