Correction Examen Vendredi 22 mars 2002

Exercice 1

1) La réponse impulsionnelle du filtre tel que $H(f) = e^{-j2\pi fT}$ est $h(t) = \delta(t-T)$. Donc

$$\boxed{X_2(t) = X_1(t) * \delta(t-T) = X_1(t-T)}$$

2) La puissance de $Y(t)$ est $P_Y(T) = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[X_1^2(t) + X_2^2(t) + 2X_1(t)X_2(t)\right]$. D'après la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{P_Y(T) = 2\left[K_{X_1}(0) + K_{X_1}(T)\right]}$$

Mais $X_1(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$, d'où

$$\begin{aligned} s_{X_1}(f) &= s_X(f)\left|H_1(f)\right|^2 \\ &= \frac{N_0}{2}\left[\Pi_{\Delta f}(f-f_0) + \Pi_{\Delta f}(f+f_0)\right] \end{aligned}$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$K_{X_1}(\tau) = \frac{N_0}{2}\left[e^{j2\pi f_0\tau}\Delta f \sin c\left(\pi\Delta f\tau\right) + e^{-j2\pi f_0\tau}\Delta f \sin c\left(\pi\Delta f\tau\right)\right]$$

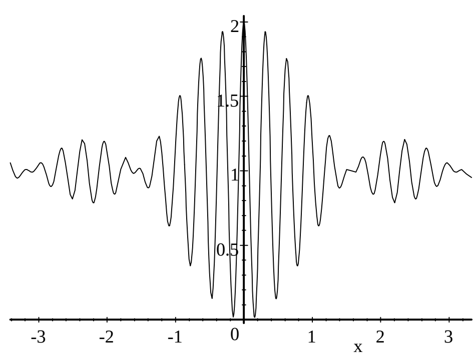
soit

$$K_{X_1}(\tau) = N_0\Delta f \sin c\left(\pi\Delta f\tau\right)\cos\left(2\pi f_0\tau\right)$$

et donc

$$\boxed{P_Y(T) = 2N_0\Delta f\left[1 + \sin c\left(\pi\Delta fT\right)\cos\left(2\pi f_0T\right)\right]}$$

3) L'expression précédente de $P_Y(T)$ montre que la puissance en sortie du système est une constante à laquelle s'ajoute un signal modulé en amplitude. Puisque $f_0 >> \Delta f$, le signal basse fréquence qui correspond à l'enveloppe est $\sin c\left(\pi\Delta f\tau\right)$, d'où la représentation graphique suivante $(T = x)$:



Exercice 2

1) Les signaux à l'entrée et à la sortie d'un filtre sont de même nature donc $y(t)$ est un signal à énergie finie. On peut le justifier simplement losque $|H(f)| \leq M, \forall f$ en calculant l'énergie de $y(t)$:

$$\begin{aligned} E_y &= \int |y(t)|^2 \, dt \\ &= \int |Y(f)|^2 \, df \text{ (Egalité de Parseval)} \\ &= \int |X(f)|^2 |H(f)|^2 \, df \leq M^2 \int |X(f)|^2 \, df = M^2 E_x \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{E_y \leq M^2 E_x}$$

2) En développant le produit de convolution $x(\tau) * \widetilde{y}(\tau)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(\tau) * \widetilde{y}(\tau) &= \int x(u)\widetilde{y}(\tau - u)du \\ &= \int x(u)\overline{y}(u-\tau)du = K_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{K_{xy}(\tau) = x(\tau) * \overline{y}(-\tau)}$$

Des raisonnement similaires permettent de montrer

$$\boxed{\begin{array}{l} K_{yx}(\tau) = y(\tau) * \overline{x}(-\tau) \\ \hline K_y(\tau) = y(\tau) * \overline{y}(-\tau) \end{array}}$$

3) Si $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$, on a $y(t) = x(t) * h(t)$, donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} K_{xy}(\tau) &= x(\tau) * \overline{y}(-\tau) \\ &= x(\tau) * \overline{x}(-\tau) * \overline{h}(-\tau) \\ &= K_x(\tau) * \overline{h}(-\tau) \end{aligned}$$

Par transformée de Fourier, on obtient :

$$\boxed{s_{xy}(f) = s_x(f)\overline{H}(f)}$$

De même

$$\begin{aligned} K_{yx}(\tau) &= y(\tau) * \overline{x}(-\tau) \\ &= x(\tau) * h(\tau) * \overline{x}(-\tau) \\ &= h(\tau) * x(\tau) * \overline{x}(-\tau) \\ &= h(\tau) * K_x(\tau) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{s_{yx}(f) = s_x(f)H(f)}$$

et finalement

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= y(\tau) * \overline{y}(-\tau) \\ &= x(\tau) * h(\tau) * \overline{x}(-\tau) * \overline{h}(-\tau) \\ &= K_x(\tau) * h(\tau) * \overline{h}(-\tau) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{s_y(f) = s_x(f) \left| H(f) \right|^2}$$

On retrouve donc facilement les relations de Wiener Lee.

4) Dans le cas où $y(t)$ est obtenue par filtrage linéaire de $x(t)$, en utilisant les résultats de la question précédente, la matrice spectrale s'écrit :

$$M(f) = \begin{pmatrix} s_x(f) & s_{xy}(f) \\ s_{yx}(f) & s_y(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x(f) & s_x(f)\overline{H}(f) \\ s_x(f)H(f) & s_x(f) \left| H(f) \right|^2 \end{pmatrix}$$

On voit donc que la deuxième ligne de cette matrice est le produit de la première ligne par $H(f)$. La matrice $M(f)$ n'est donc pas inversible. On vérifie d'ailleurs que le déterminant de cette matrice est nul.

On montrerait que la singularité de la matrice $M(f)$ est équivalente à "$y(t)$ est obtenue par filtrage linéaire de $x(t)$". On peut utiliser cette propriété pour déterminer si deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont liés par une relation de filtrage linéaire.

Exercice 3

1) Par l'isométrie fondamentale

$$y(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$$

on a

$$y(T) \leftrightarrow e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi ft} H_t(f)$$

avec $H_t(f) = e^{j2\pi f(T-t)}$. Pusique $H_t(f)$ dépend de t, l'opération qui au signal $y(t)$ fait correspondre $y(T)$ n'est pas une opération de filtrage linéaire (et pourtant l'opération est linéaire !!).

2) Lorsque $x(t) = s(t)$, on a

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) * h(t) \\ &= \int s(u)h(t-u)du \\ &= \int s(u)s(T-t+u)\,du \end{aligned}$$

Pour $t = T$, on a donc

$$\boxed{y(T) = \int s^2(u)du = E}$$

3) Lorsque $x(t)$ est un bruit blanc stationnaire $n(t)$, la densité spectrale de $y(t)$ est donnée par la relation de Wiener-Lee :

$$s_y(f) = \frac{N_0}{2} \left| H(f) \right|^2$$

avec $H(f) = TF\left[s(T-t)\right] = TF\left(s(-t) * \delta(t-T)\right) = S(-f)e^{j2\pi fT} = S(f)e^{j2\pi fT}$ (la transformée de Fourier d'un signal réel est paire), d'où

$$s_y(f) = \frac{N_0}{2} \left| S(f) \right|^2$$

La puissance de $y(t)$ s'obtient alors en intégrant $s_y(f)$:

$$\boxed{P_y = E\left[y^2(t)\right] = \int \frac{N_0}{2} \left|S(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2} E}$$

Bien sur, puisque le signal $y(t)$ est stationnaire, la puissance de $y(t)$ est indépendante du temps (en particulier $E\left[y^2(T)\right] = \frac{N_0}{2}E$).

4) Sous l'hypothèse H_0, on a $x(t) = n(t)$ donc $y(t) = n(t) * h(t) = \int n(u)h(t-u)du$. On a alors aisément :

$$\begin{aligned} E\left[y(t)|\, H_0\right] &= 0 \\ Var\left[y(t)|\, H_0\right] &= E\left[y^2(t)\middle|\, H_0\right] = \frac{N_0}{2}E \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse H_1, on a $x(t) = n(t) + s(t)$, donc $y(t) = n(t) * h(t) + s(t) * h(t)$. On a donc

$$\begin{aligned} E\left[y(T)|\, H_1\right] &= s(t) * h(t)|_{t=T} = E \\ Var\left[y(T)|\, H_0\right] &= \frac{N_0}{2}E \end{aligned}$$

On voit donc que pour détecter la présence du signal $s(t)$, on peut adopter la règle suivante

H_1 acceptée si $y(T) > \Lambda$
H_0 acceptée sinon

5) La probabilité de fausse alarme est définie par

$$\begin{aligned} PFA &= P\left[\text{rejeter } H_0|\, H_0 \text{ vraie}\right] \\ &= P\left[y(T) > \Lambda|\, y(T) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}E\right)\right] \\ &= P\left[y(T)\sqrt{\frac{2}{EN_0}} > \Lambda\sqrt{\frac{2}{EN_0}}\middle|\, y(T)\sqrt{\frac{2}{EN_0}} \sim \mathcal{N}(0,1)\right] \\ &= \int_{\Lambda\sqrt{\frac{2}{EN_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{PFA = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf} c\left(\Lambda\sqrt{\frac{2}{EN_0}}\right)}$$

Dans les applications pratiques, on se fixe une probabilité de fausse alarme PFA et on déduit la valeur du seuil à l'aide de la relation

$$\Lambda = \sqrt{\frac{EN_0}{2}} \operatorname{erf} c^{-1}\left[2\sqrt{2}PFA\right],$$

ce qui nécessite de connaître l'énergie du signal E et la densité spectrale de puissance du bruit $\frac{N_0}{2}$ (Remarque : la fonction $\operatorname{erf} c^{-1}$ est tabulée dans tous les bons logiciels comme MATLAB).