Corrections de l'examen de théorie du signal du 4 avril 2003

Exercice 1

1) Le signal $s(t)$ est clairement un **signal à énergie finie** et

$$E = \int x^2(u)du = T$$

Le signal $b(t)$ est un **signal aléatoire stationnaire (au second ordre)**. On parle de bruit blanc par analogie avec la lumière blanche lorsqu'on a un signal dont la densité spectrale de puissance (DSP) est **constante**, ce qui est le cas ici puisque $s_b(f) = 2a$.

2) D'après les relations de Wiener-Lee, on a

$$\begin{aligned} s_{y_b}(f) &= s_b(f)\left|H(f)\right|^2 \\ &= 2a\frac{1}{a^2+4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

Donc la fonction d'autocorrélation de $y_b(t)$ est

$$K_{y_b}(\tau) = e^{-a|\tau|}$$

et la puissance du signal $y_b(t)$ est

$$P_{y_b} = K_{y_b}(0) = \boxed{1}$$

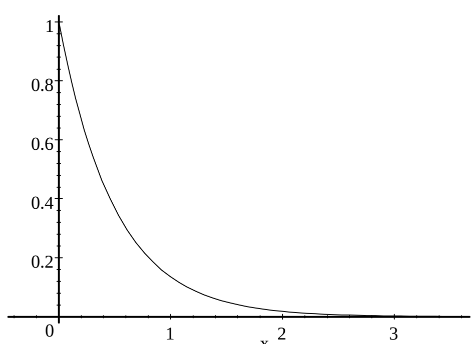
3) Le signal $y_s(t)$ est défini par

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{\mathbb{R}} s(u)h(t-u)du \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t-u)du \\ &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} h(v)dv \end{aligned}$$

Mais la réponse impulsionnelle du filtre

$$h(x) = e^{-ax}u\left(x\right)$$

représentée ci-dessous pour $a = 2$



s'intégre facilement dans l'intervalle $\left[t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}\right]$:

$$\text{si } t > \frac{T}{2} \text{ alors} \quad \begin{aligned} y_s(t) &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{-av} dv \\ &= \frac{1}{a} e^{-at} \left[e^{a\frac{T}{2}} - e^{-a\frac{T}{2}}\right] \\ &= \boxed{\frac{2}{a} e^{-at} sh \left[a\frac{T}{2}\right]} \end{aligned}$$

$$\text{si } t < -\frac{T}{2} \text{ alors } y_s(t) = \boxed{0}$$

$$\text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \text{ alors} \quad \begin{aligned} y_s(t) &= \int_0^{t+\frac{T}{2}} e^{-av} dv \\ &= \boxed{\frac{1}{a}\left[e^{-a\left(t+\frac{T}{2}\right)} - 1\right]} \end{aligned}$$

4) A l'instant $t = \frac{T}{2}$, on a d'après la question précédente

$$y_s\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{a}\left[e^{-aT} - 1\right]$$

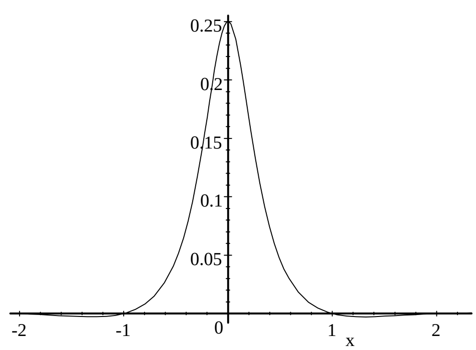
et donc le rapport signal sur bruit instantané est

$$RSB = \frac{y_s^2\left(\frac{T}{2}\right)}{E\left[y_b^2(t)\right]} = \boxed{\frac{\left[e^{-aT} - 1\right]^2}{a^2}}$$

5) Le signal $y_s(t)$ est un signal déterministe de transformée de Fourier

$$TF\left[y_s(t)\right] = S(f)H(f) = \frac{T \sin c\left(\pi f T\right)}{a + j2\pi f}$$

Le module de cette transformée de Fourier est représenté ci-dessous pour $a = 2$ et $T = 1$:



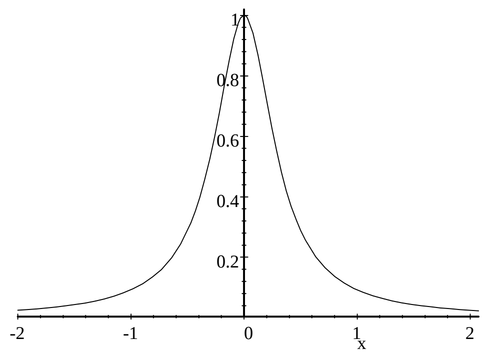
Comme on peut le remarquer, les lobes secondaires de $TF\left[y_s(t)\right]$ sont négligeables sur cet exemple par rapport à son lobe principal. On peut donc considérer (comme le dit l'énoncé) que la bande utile de $TF\left[y_s(t)\right]$ est $\left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]$. La condition de Shannon pour ce signal s'écrit

$$\boxed{F_e > \frac{2}{T}}$$

La densité spectrale de puissance du signal $y_b(t)$ a été déterminée précédemment :

$$s_{y_b}(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Elle est représentée ci-dessous pour $a = 2$:



La condition $s_{y_b}(f) \leq \frac{s_{y_b}(0)}{100}$ donne

$$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \leq \frac{1}{100}\frac{2a}{a^2} \Leftrightarrow 100a^2 \leq a^2 + 4\pi^2 f^2$$

c'est-à-dire

$$|f| \leq \frac{\sqrt{99}a}{2\pi} \simeq \frac{5a}{\pi}$$

La condition de Shannon pour le signal $y_b(t)$ s'écrit donc

$$\boxed{F_e > \frac{10a}{\pi}}$$

Exercice 2

1) Puisque $y_1(t)$ est obtenu par filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT) de $x(t)$ avec un filtre de transmittance $H_1(f)$, $x(t)$ est obtenu par filtrage LIT inverse de $y_1(t)$ par un filtre de transmittance $\frac{1}{H_1(f)}$. On a donc :

$$x(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}\frac{1}{H_1(f)}$$

Mais $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$, donc

$$y_2(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}\frac{1}{H_1(f)}H_2(f) = e^{j2\pi ft}\frac{H_2(f)}{H_1(f)}$$

2) On peut alors en déduire

$$\begin{aligned}
E\left[y_1(t)y_2^*(t-u)\right] &= \langle y_1(t), y_2(t-u)\rangle \\
&= \left\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi f(t-u)}\frac{H_2(f)}{H_1(f)}\right\rangle \\
&= \int e^{j2\pi ft}e^{-j2\pi f(t-u)}\frac{H_2^*(f)}{H_1^*(f)}s_{y_1}(f)df \\
&= \int e^{j2\pi fu}\frac{H_2^*(f)}{H_1^*(f)}s_{y_1}(f)df
\end{aligned}$$

D'après les relations de Wiener Lee, la DSP de $y_1(t)$ est définie par

$$s_{y_1}(f) = s_x(f)\left|H_1(f)\right|^2 = s_x(f)H_1(f)H_1^*(f)$$

donc

$$E\left[y_1(t)y_2^*(t-u)\right] = \int e^{j2\pi fu}\frac{H_2^*(f)}{H_1^*(f)}s_x(f)H_1(f)H_1^*(f)df$$

c'est-à-dire

$$\boxed{E\left[y_1(t)y_2^*(t-u)\right] = \int e^{j2\pi fu}s_x(f)H_1(f)H_2^*(f)df}$$

Cette dernière relation est la formule des interférences qui a été vue en cours.

Exercice 3

1) Les signaux $s(t)$ et $a(t)$ étant déterministes, on a

$$\begin{aligned} TF\left[y_s(t)\right] &= S(f)H(f) \\ TF\left[y_a(t)\right] &= A(f)H(f) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{y_s(t_0) = \int S(f)H(f)e^{j2\pi ft_0}df}$$
$$\boxed{y_a(t_0) = \int A(f)H(f)e^{j2\pi ft_0}df}$$

2) Par linéarité du filtre, on a

$$y_x(t) = y_s(t) + ky_a(t)$$

Pour que la sortie du filtre à l'instant t_0 soit indépendante du signal de brouillage, il faut

$$y_a(t_0) = 0$$

c'est-à-dire que la condition C s'écrit :

$$\boxed{\int A(f)H(f)e^{j2\pi ft_0}df = 0}$$

Cette condition est par exemple satisfaite lorsque les bandes de $A(f)$ et de $H(f)$ sont disjointes,

c'est-à-dire lorsque les fréquences de brouillage sont hors de la bande passante du filtre.

3) Lorsque $a(t) = \cos\left(2\pi f_c t\right)$ est un brouilleur sinusoidal, on a

$$A(f) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_c\right) + \delta\left(f + f_c\right)\right]$$

donc, en décomposant $H(f)$ sous la forme $H(f) = M(f)e^{j\Phi(f)}$ (où le module $M(f)$ est une fonction paire et la phase $\Phi(f)$ est une fonction impaire, la condition C s'écrit

$$\int \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_c\right) + \delta\left(f + f_c\right)\right]M(f)e^{j\Phi(f)}e^{j2\pi ft_0}df = 0$$

soit

$$M(f_c)e^{j\Phi(f_c)}e^{j2\pi f_c t_0} + M(-f_c)e^{j\Phi(-f_c)}e^{-j2\pi f_c t_0} = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M(f_c)\cos\left(2\pi f_c t_0 + \Phi(f_c)\right) = 0}$$

On retrouve la condition précédente $M(f_c) = 0$ mais également un autre ensemble de solutions définies par

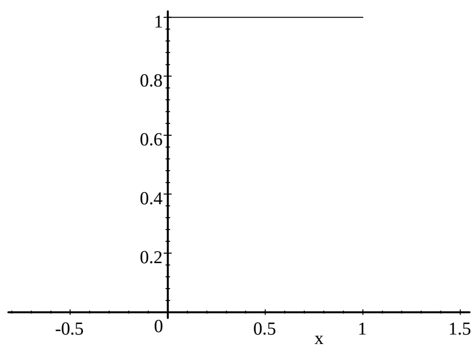
$$2\pi f_c t_0 + \Phi(f_c) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

4)

- Lorsque l'entrée du filtre est $s_0(t)$, la sortie de ce même filtre est

$$\begin{aligned}
y_{s_0}(t) &= s_0(t) * h(t) \\
&= \int s_0(u)h(t-u)du \\
&= \int_0^T h(t-u)du \\
&= \int_{t-T}^t h(v)dv \\
&= \int_{t-T}^t s_0(v)dv
\end{aligned}$$

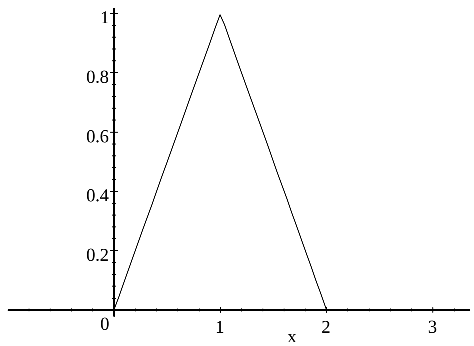
  La fonction $s_0(x)$ est représentée ci-dessous pour $T = 1$:



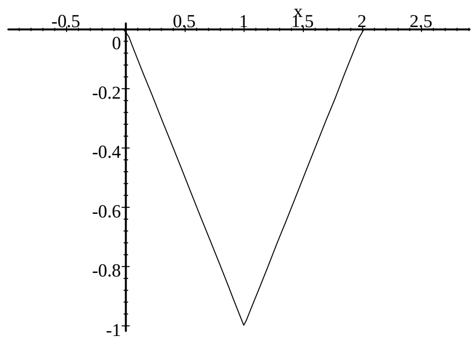
- Pour $x < 0$ et $x > 2T$,on a clairement $\boxed{y_{s_0}(x) = 0}$. Par contre, pour $x \in [0, 2T]$, $y_{s_0}(x)$ est définie par :

$$\begin{aligned}
x &\in [0, T] \qquad y_{s_0}(x) = \int_0^x dv = \boxed{x} \\
x &\in [T, 2T] \qquad y_{s_0}(x) = \int_{x-T}^T dv = \boxed{2T - x}
\end{aligned}$$

  Cette sortie est représentée ci-dessous dans le cas $T = 1$:



- Lorsque l'entrée du filtre du filtre est $s_1(t) = -s_0(t)$, on a $\boxed{y_{s_1}(x) = -y_{s_0}(x)}$ qui est représentée ci-dessous pour $T = 1$:



- On voit donc qu'en absence de bruit le signal de sortie est positif lorsque $s_0(t)$ a été émis et ce même signal de sortie est négatif lorsque $s_1(t)$ a été émis. On a intérêt à se placer à l'instant $t = T$ pour prendre la décision puisque c'est à cet instant que les signaux $y_{s_0}(t)$ et $y_{s_1}(t)$ diffèrent le plus.

- Il y a deux types d'erreurs "décider que $s_0(t)$ a été émis alors qu'en fait il s'agit de $s_1(t)$" et "décider que $s_1(t)$ a été émis alors qu'en fait il s'agit de $s_0(t)$". Il est assez naturel de définir la probabilité d'erreur comme suit (on suppose que les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont équiprobables) :

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} P\left[\text{décider } s_0(t) | \, s_1(t)\right] + \frac{1}{2} P\left[\text{décider } s_1(t) | \, s_0(t)\right] \\ &= \frac{1}{2} P\left[y_x(t) > 0 | \, s_1(t)\right] + \frac{1}{2} P\left[y_x(t) < 0 | \, s_1(t)\right] \end{aligned}$$

Dans le cas où $a(t)$ est un brouilleur gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2, $y_a(t)$ est aussi de moyenne nulle et donc on a

$$\begin{aligned} y_x(t) | \, s_1(t) &\sim \mathcal{N}\left(s_1(t), k^2\sigma^2\right) \\ y_x(t) | \, s_0(t) &\sim \mathcal{N}\left(s_0(t), k^2\sigma^2\right) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} P\left[\frac{y_x(t) - s_1(t)}{k\sigma} > \frac{-s_1(t)}{k\sigma} \middle| \frac{y_x(t) - s_1(t)}{k\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} P\left[\frac{y_x(t) - s_0(t)}{k\sigma} < \frac{-s_0(t)}{k\sigma} \middle| \frac{y_x(t) - s_0(t)}{k\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{\frac{-s_1(t)}{k\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{-s_0(t)}{k\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Puisque $s_1(t) = -s_0(t)$, les deux termes sont égaux et donc

$$\boxed{P_e = \int_{-\infty}^{\frac{-s_0(t)}{k\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}$$

Bien entendu, cette question était beaucoup plus compliquée que le reste de l'examen et on ne demandait que les principes.