Corrections de l'examen de traitement du signal du 14 avril 2003

Exercice 1

1) Considérons l'isométrie construite sur le processus $X(t)$

$$X(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$$

La corrrespondance de $Y(t)$ par cette isométrie est

$$\begin{aligned} Y(t) &\leftrightarrow \int_{t+a}^{t+b} e^{j2\pi fu}du - \int_{t-b}^{t-a} e^{j2\pi fu}du \\ Y(t) &\leftrightarrow \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f}\left[e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa} + e^{-j2\pi fb}\right] \end{aligned}$$

On voit donc que cette correspondance s'écrit $e^{j2\pi ft}H(f)$, ce qui signifie que $Y(t)$ est le résultat d'un filtrage de $X(t)$ par un filtre de fonction de transfert

$$\boxed{H(f) = \frac{\cos(2\pi fb) - \cos(2\pi fa)}{j\pi f}}$$

Pour déterminer la réponse impulsionnelle du filtre, le plus simple est de prendre $X(t) = \delta(t)$ et on obtient

$$h(t) = \int_{t+a}^{t+b} \delta(u)du - \int_{t-b}^{t-a} \delta(u)du$$

d'où

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-b, -a] \\ -1 \text{ si } t \in [a, b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

2) Puisque $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire invariant dans le temps de $X(t)$ et que $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire, $Y(t)$ est un processus stationnaire (voir cours). Sa moyenne est définie par

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_{t+a}^{t+b} E[X(u)]\,du - \int_{t-b}^{t-a} E[X(u)]\,du \\ &= m(b-a) - m(b-a) = \boxed{0} \end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance de $Y(t)$ s'obtient à l'aide des relations de Wiener Lee

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f)\,|H(f)|^2 \\ &= \boxed{s_X(f)\frac{\left[\cos(2\pi fb) - \cos(2\pi fa)\right]^2}{\pi^2 f^2}} \end{aligned}$$

3) Dans le cas où

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

on sait bien que $m = 0$,$K_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ et $s_X(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$. On en déduit

$$E[Y(t)] = \boxed{0}$$

et

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= \frac{A^2}{4}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]\frac{\left[\cos\left(2\pi f b\right)-\cos\left(2\pi f a\right)\right]^2}{\pi^2 f^2} \\ &= \boxed{\frac{A^2}{4}\frac{\left[\cos\left(2\pi f_0 b\right)-\cos\left(2\pi f_0 a\right)\right]^2}{\pi^2 f_0^2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]} \end{aligned}$$

4) Dans le cas où $b = a + \varepsilon$ et u est petit, on a

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{\cos\left(2\pi f a + 2\pi f \varepsilon\right)-\cos\left(2\pi f_0 a\right)}{j\pi f} \\ &= \frac{\cos\left(2\pi f a\right)\cos\left(2\pi f \varepsilon\right)-\sin\left(2\pi f a\right)\sin\left(2\pi f \varepsilon\right)-\cos\left(2\pi f_0 a\right)}{j\pi f} \\ &\simeq \frac{-\sin\left(2\pi f_0 a\right)2\pi f\varepsilon}{j\pi f} = 2j\varepsilon\sin\left(2\pi f a\right) = \boxed{\varepsilon\left[e^{j2\pi f a}-e^{-j2\pi f a}\right]} \end{aligned}$$

On en déduit la réponse impulsionnelle approchée du filtre

$$h(t) \simeq \boxed{\varepsilon\left[\delta\left(t-a\right)-\delta\left(t+a\right)\right]}$$

et le relation entrée-sortie du filtre

$$\boxed{y(t) \simeq \varepsilon\left[x\left(t-a\right)-x\left(t+a\right)\right]}$$

5) Un tel filtre compare la valeur du signal à l'instant $t+a$ à celle obtenue à l'instant $t-a$. Il peut par exemple être utilisé pour détecter des ruptures dans un signal ou dans une image. La présence d'une rupture produit une forte valeur de $y(t)$ par rapport à l'absence de rupture.

Exercice 2

- **Conversion Analogique-Numérique (Echantillonnage + Quantification)**

  On a besoin d'échantillonner et de quantifier un signal analogique pour le transformer en un signal numérique. L'échantillonnage consiste à prendre un échantillon toutes les T_e secondes, où T_e est la période d'échantillonnage. Cette opération se traduit spectralement par une périodisation du spectre :

  $$x_e(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_e)\delta\left(t-iT_e\right) \Leftrightarrow X_e(f) = F_e\sum_{i=-\infty}^{\infty} X(f-iF_e)$$

  avec $X(f) = TF\left[x(t)\right]$ et $X_e(f) = TF\left[x_e(t)\right]$. L'opération de quantification consiste à approcher les amplitudes d'un signal à l'aide d'un nombre fini de valeurs qui vont ensuite être codées par exemple à l'aide de suites de 1 et de 0. En général le nombre de valeurs est choisi sous la forme 2^{N_b}, où N_b est le nombre de bits de quantification.

- **Mise en forme**

  Dans le cas d'un codage à l'aide de 1 et de 0, on décide de transmettre un signal correspondant au bit 1 et un autre signal correspondant au bit 0. Une telle opération est appelée opération de mise en forme. Un exemple de signal obtenu (traité en cours) est le signal NRZ.

- **Modulation**

  L'opération de modulation a pour but de translater le spectre du signal mis en forme (appelé parfois signal en bande de base) autour d'une fréquence porteuse. Par exemple, dans le cas d'une modulation d'amplitude, le signal modulé est défini par $x_{\text{modulé}}(t) = y(t)\cos(2\pi f_0 t)$. Si le signal $y(t)$ est déterministe alors

  $$X_{\text{modulé}}(f) = \frac{1}{2}\left[Y(f - f_0) + Y(f + f_0)\right]$$

  ce qui traduit bien le décalage en fréquence du spectre de $y(t)$

- **Canal de transmission**

  Le canal de transmission modélise la transmission du signal mis en forme modulé à travers un milieu qui peut être l'air, un cable ... Dans beaucoup d'applications, on modélise ce canal par un filtre linéaire invariant dans le temps défini par $z(t) = x_{\text{modulé}}(t) * h(t)$. D'un point de vue spectral, on a pour un signal déterministe $Z(f) = X_{\text{modulé}}(f)H(f)$ et $s_Z(f) = s_{X_{\text{modulé}}}(f)\left|H(f)\right|^2$ tandis que pour un signal aléatoire, seule la seconde relation est vérifiée.

- **Bruit additif Gaussien**

  On modélise généralement les perturbations que va subir le signal, à sa traversée du canal de propagation, par un bruit additif généralement Gaussien. Dans un souci de simplification, on suppose souvent que ce bruit est blanc, (densité spectrale de puissance constante) et indépendant du signal. Le signal bruité s'écrit alors :

  $$u(t) = z(t) + b(t)$$

  où $b(t)$ désigne le bruit additif.

- **Démodulation**

  A la réception, pour retrouver le signal mis en forme, on démodule le signal reçu à l'aide de l'opération suivante

  $$\begin{aligned} v(t) &= u(t)\cos(2\pi f_0 t) \\ &= z(t)\cos(2\pi f_0 t) + b(t)\cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

  Après filtrage cette opération permet de récupérer le signal d'origine.

- **Décision**

  Après démodulation, on doit décider quelle suite de 1 et de 0 a été transmise. Dans le cas le plus simple, on compare le signal démodulé $v(t)$ à un seuil S et on adopte la règle de décision suivante

  $$\begin{aligned} \text{“1 a été émis” si } v(t) &> S \\ \text{“0 a été émis” si } v(t) &\leq S \end{aligned}$$

  Le seuil dépend en général des lois conditionnelles du signal $v(t)$ (loi de $v(t)$ sachant que 1 a été émis et loi de $v(t)$ sachant que 0 a été émis) mais aussi des probabilités a priori des bits 1 et 0.

- **Conversion Numérique-Analogique**

  Dans certaines applications comme le traitement de la parole, il est nécessaire de reconstituer le signal après l'avoir reçu et traité. Ceci peut par exemple se faire par interpolation linéaire ou à l'aide d'un bloqueur.

Exercice 3

1) Notons tout d'abord qu'on passe de $x_1(t)$ à $x_2(t)$ en changeant θ en $-\theta$. Il suffit donc d'étudier le signal $x_1(t)$. On a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e-\theta\right)\delta\left(t-kT_e+\theta\right) \\ &= T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(t\right)\delta\left(t-kT_e+\theta\right) \\ &= T_e x(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t-kT_e+\theta\right) \end{aligned}$$

Si on pose $Ш_{T_e}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t-kT_e\right)$, alors on a

$$x_1(t) = T_e x(t)\, Ш_{T_e}(t+\theta)$$

d'où

$$\begin{aligned} X_1(f) &= T_e X(f) * \left\{ \frac{1}{T_e} Ш_{1/T_e}(f)\, e^{j2\pi f\theta} \right\} \\ &= X(f) * \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-kF_e\right) e^{j2\pi f\theta} \right\} \\ &= X(f) * \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-kF_e\right) e^{j2\pi kF_e\theta} \right\} \\ &= \boxed{\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi kF_e\theta} X\left(f-kF_e\right)} \end{aligned}$$

En changeant θ en $-\theta$, on obtient

$$\boxed{X_2(f) = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-j2\pi kF_e\theta} X\left(f-kF_e\right)}$$

2) En prenant en compte le fait que $X(f)$ est à support borné $[-B,+B]$, et en remarquant que $F_e = B$, on obtient à partir de la représentation graphique de $X_1(f)$ et de $X_2(f)$:

- $f \in [0, B]$

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X(f) + X(f-B)e^{j2\pi\theta B} \\ X_2(f) &= X(f) + X(f-B)e^{-j2\pi\theta B} \end{aligned}$$

- $f \in [-B, 0]$

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X(f) + X(f+B)e^{-j2\pi\theta B} \\ X_2(f) &= X(f) + X(f+B)e^{j2\pi\theta B} \end{aligned}$$

En calculant la solution de ces systèmes de deux équations à deux inconnues, on obtient

- $f \in [0, B]$

$$X(f) = \frac{e^{j2\pi\theta B} X_2(f) - e^{-j2\pi\theta B} X_1(f)}{e^{j2\pi\theta B} - e^{-j2\pi\theta B}}$$

- $f \in [-B, 0]$

$$X(f) = \frac{e^{-j2\pi\theta B} X_2(f) - e^{j2\pi\theta B} X_1(f)}{e^{-j2\pi\theta B} - e^{j2\pi\theta B}}$$

En regroupant ces résultats, on en déduit

$$X(f) = \frac{e^{j2\pi\theta B} X_2(f) - e^{-j2\pi\theta B} X_1(f)}{e^{j2\pi\theta B} - e^{-j2\pi\theta B}} \Pi_B \left(f - \frac{B}{2}\right) + \frac{e^{-j2\pi\theta B} X_2(f) - e^{j2\pi\theta B} X_1(f)}{e^{-j2\pi\theta B} - e^{j2\pi\theta B}} \Pi_B \left(f + \frac{B}{2}\right)$$

d'où

$$X(f) = X_1(f) H_1(f) + X_2(f) H_2(f)$$

avec

$$\begin{aligned} H_1(f) &= \frac{-e^{-j2\pi\theta B} \Pi_B \left(f - \frac{B}{2}\right) - e^{j2\pi\theta B} \Pi_B \left(f + \frac{B}{2}\right)}{e^{j2\pi\theta B} - e^{-j2\pi\theta B}} \\ H_2(f) &= \frac{e^{-j2\pi\theta B} \Pi_B \left(f + \frac{B}{2}\right) + e^{j2\pi\theta B} \Pi_B \left(f - \frac{B}{2}\right)}{e^{j2\pi\theta B} - e^{-j2\pi\theta B}} \end{aligned}$$

3) On peut pratiquement reconstruire $x(t)$ en filtrant les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et en ajoutant la sortie des deux filtres.