Corrections de l'examen de traitement du signal du 5 mai 2004

Exercice 1

1) Le signal échantillonné s'écrit

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) \\ &= x(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t-kT_e\right) \end{aligned}$$

Sa transformée de Fourier est donc

$$X_e(f) = X(f) * \left\{F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-kF_e\right)\right\}$$

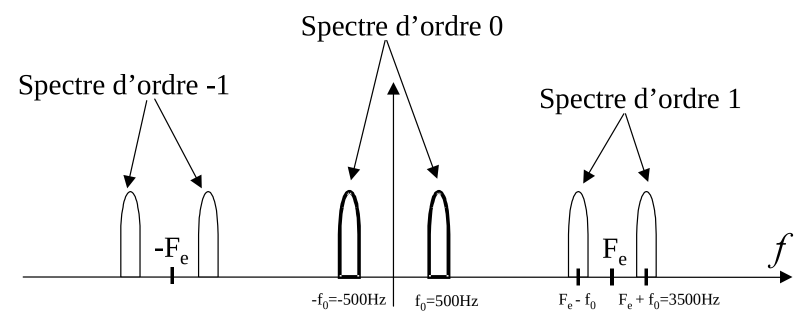
c'est-à-dire

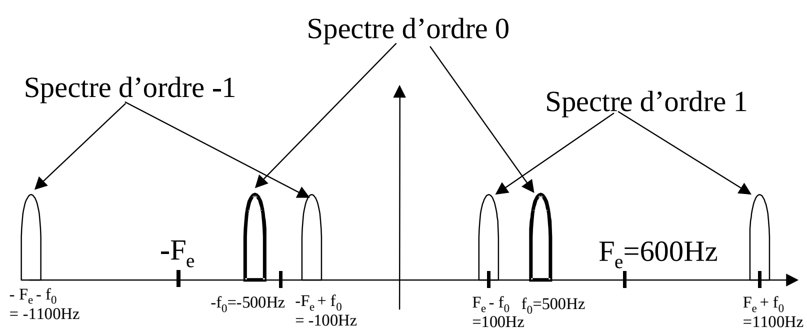
$$\boxed{X_e(f) = F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X\left(f-kF_e\right)}$$

avec

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$$

Ces transformées de Fourier sont représentées ci-dessous dans les deux cas $F_e = 3kHz$ et $F_e = 600Hz$





2) Si on utilise un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$, on récupère dans le premier cas une sinusoide de fréquence $f_0 = 500Hz$ et dans le second cas une sinusoide de fréquence $100Hz$. L'expression de $x_r(t)$ obtenue par interpolation des points $x(kT_e)$,$k \in \mathbb{Z}$ est

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_e(t) * TF^{-1}\left[\Pi_{F_e}(f)\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) * F_e \sin c\left(\pi F_e t\right) \\ &= F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right) \sin c\left[\pi F_e\left(t-kT_e\right)\right] \end{aligned}$$

Il s'agit d'une interpolation à l'aide de sinus cardinaux que l'on qualifie de formule de reconstruction de Shannon.

3) L'autocorrélation du signal périodique $x(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_k c_l^* \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi k f_o t} e^{-j2\pi l f_o (t-\tau)} dt \end{aligned}$$

Tous les termes correspondant à $k \neq l$ sont nuls car on intègre une fonction périodique sur un multiple de sa période. Il reste donc les termes correspondant à $k = l$, c'est-à-dire

$$K_x(\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k\right|^2 e^{j2\pi k f_o \tau}$$

La densité spectrale de puissance s'en déduit :

$$s_X(f) = TF\left[K_x(\tau)\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k\right|^2 \delta\left(f - kf_0\right)$$

Pour que ce signal soit échantillonnable, il faut qu'il existe K tel que

$$\boxed{c_k = 0, \qquad \forall k > K}$$

Les coefficients de la décomposition du signal $m(t) = \Pi_{2a}(t)$ en série de Fourier s'écrivent

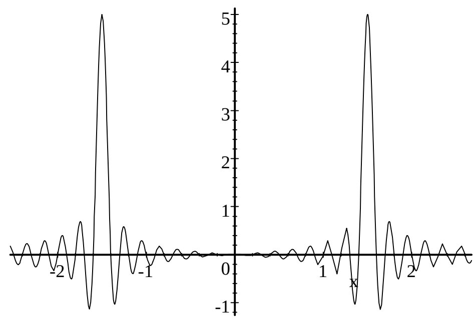
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} m(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 a} - e^{j2\pi k f_0 a}}{-j2\pi k f_0} \\ &= a \sin c\left(2\pi k f_0 a\right) \end{aligned}$$

Pour que ces coefficients soient nuls à partir d'un certain rang, il faut et il suffit que $f_0 a \in \mathbb{N}$. Mais ce n'est pas possible puisque d'après l'énoncé, on a $0 < a < \frac{T_0}{2}$ et donc $0 < f_0 a < \frac{1}{2}$.

4) Il est clair que $y(t)$ appartient à la classe des signaux à énergie finie. La transformée de Fourier de $y(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right] * \left[T \sin c\left(\pi T f\right)\right] \\ &= \frac{AT}{2}\left[\sin c\left\{\pi T\left(f-f_0\right)\right\}+\sin c\left\{\pi T\left(f+f_0\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

Ce résultat est bien connu : puisque $y(t)$ est observé sur une fenêtre de durée finie, chaque raie est représentée par un sinus cardinal. Pour $T = 10$, $A = 1$ et $f_0 = 1.5$, on obtient la représentation graphique suivante :



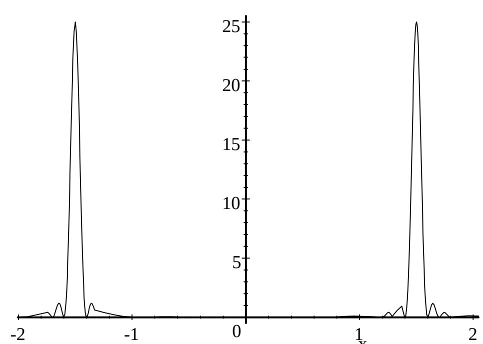
On en déduit la densité spectrale d'énergie de $y(t)$

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= \left|Y(f)\right|^2 = Y(f)Y^*(f) \\ &= \left(\frac{AT}{2}\right)^2\left[\sin c^2\left\{\pi T\left(f-f_0\right)\right\}+\sin c^2\left\{\pi T\left(f+f_0\right)\right\}+2\sin c\left\{\pi T\left(f-f_0\right)\right\}\sin c\left\{\pi T\left(f+f_0\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

Dans la mesure où T est "suffisamment grand", le terme $\sin c\left\{\pi T\left(f-f_0\right)\right\}\sin c\left\{\pi T\left(f+f_0\right)\right\}$ peut être négligé et on obtient

$$s_Y(f) \simeq \left(\frac{AT}{2}\right)^2\left[\sin c^2\left\{\pi T\left(f-f_0\right)\right\}+\sin c^2\left\{\pi T\left(f+f_0\right)\right\}\right]$$

Chaque raie apparait donc sous la forme du carré d'un sinus cardinal. Pour $T = 10$, $A = 1$ et $f_0 = 1.5$, on obtient la représentation graphique suivante :



Exercice 2

1) Considérons l'isométrie construite sur le processus $x(t)$

$$x(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x(t+h)-x(t)}{h} & \leftrightarrow & \dfrac{e^{j2\pi f(t+h)}-e^{j2\pi ft}}{h} = e^{j2\pi ft}\dfrac{e^{j2\pi fh}-1}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h} & \leftrightarrow & e^{j2\pi ft}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{j2\pi fh}-1}{h} = (j2\pi f)\, e^{j2\pi ft} \end{array}$$

Puisque la correspondance de $x'(t)$ est de la forme $H(f)e^{j2\pi ft}$, l'opération de dérivation est un filtre dont la fonction de transfert est

$$\boxed{H(f) = j2\pi f}$$

La réponse impulsionnelle est la réponse à $x(t) = \delta(t)$, c'est-à-dire

$$\boxed{h(t) = \delta'(t)}$$

2) Si $x(t)$ possède une transformée de Fourier, on a

$$TF\left[x'(t)\right] = (j2\pi f)\, X(f)$$

qui est de la forme $H(f)X(f)$ avec $H(f) = j2\pi f$. On retrouve bien le résultat ci-dessus. Lorsque l'entrée est $x(t) = u(t)$, la sortie est $y(t) = x'(t) = \delta(t)$. Puisque l'entrée est bornée et que la sortie ne l'est pas, $\boxed{\text{le filtre dérivateur n'est pas stable.}}$

3) La réponse impulsionnelle du filtre de transmittance $H_1(f) = H(f)\Pi_{2B}(f)$ est

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h(t) * TF^{-1}\left[\Pi_{2B}(f)\right] \\ &= \delta'(t) * \left[2B\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}\right] \\ &= \left[2B\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}\right]' \\ &= \left[\frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\right]' \\ &= \frac{2\pi^2 Bt\cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt)\,\pi}{\pi^2 t^2} \\ &= \boxed{\frac{2B\cos(2\pi Bt)}{t} - \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t^2}} \end{aligned}$$

Ce filtre est stable si et seulement si

$$\int |h_1(t)|\, dt < \infty$$

Cette dernière relation n'est clairement pas vérifiée et donc le filtre de réponse impulsionnelle $h_1(t)$ n'est pas stable. Pour réaliser un tel filtre, il suffit de tronquer sa réponse impulsionnelle sur $[-T, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, T]$.

4) L'erreur $\varepsilon(t)$ vérifie

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= e'(t) - h_2(t) \\
&= \left[\frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\right]' \Pi_T(t) + \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\Pi_T'(t) - \left[\frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\right]' \Pi_T(t) \\
&= \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\Pi_T'(t) \\
&= \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}\left[\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \\
&= \boxed{\frac{2\sin(\pi BT)}{\pi T}\left[\delta\left(t+\tfrac{T}{2}\right) - \delta\left(t-\tfrac{T}{2}\right)\right]}
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de l'erreur est donc définie par

$$\begin{aligned}
TF\left[\varepsilon(t)\right] &= \frac{2\sin(\pi BT)}{\pi T}\left[e^{j2\pi f\frac{T}{é}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{é}}\right] \\
&= \boxed{\frac{4j\sin(\pi BT)}{\pi T}\sin(\pi fT)}
\end{aligned}$$

Lorsque $BT \in \mathbb{N}$, on a $\sin(\pi BT) = 0$ et donc la transformée de Fourier de l'erreur $\varepsilon(t)$ est nulle.

Exercice 3

1) Un bruit blanc est un bruit stationnaire dont la densité spectrale de puissance est constante. Un bruit Gaussien est un bruit tel que le vecteur $(X(t_1), ..., X(t_n))$ possède une densité de probabilité Gaussienne pour tout vecteur $(t_1, ..., t_n)$.
2) La moyenne de $Y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}
E\left[Y(t)\right] &= E\left[e^{X(t)}\right] \\
&= m(1) = \boxed{\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
E\left[Y^2(t)\right] &= E\left[e^{2X(t)}\right] \\
&= m(2) = \boxed{\exp\left(2\sigma^2\right)}
\end{aligned}$$

3) Puisque $X(t)$ est un processus Gaussien, le couple $(X(t), X(t-\tau))$ possède une loi normale à deux dimensions. La moyenne de ce couple est

$$\mu = \begin{pmatrix} E\left[X(t)\right] \\ E\left[X(t-\tau)\right] \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

La matrice de ce couple est

$$M = \begin{pmatrix} Var\left[X(t)\right] & cov\left[X(t), X(t-\tau)\right] \\ cov\left[X(t), X(t-\tau)\right] & Var\left[X(t-\tau)\right] \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
Var\left[X(t)\right] &= Var\left[X(t-\tau)\right] = \boxed{\sigma^2} = K_X(0) \\
cov\left[X(t), X(t-\tau)\right] &= E\left[X(t)X(t-\tau)\right] - E\left[X(t)\right]E\left[X(t-\tau)\right] = \boxed{K_X(\tau)}
\end{aligned}$$

où $K_X(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $X(t)$. La densité du couple $(X(t), X(t-\tau))$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(M)}} \exp\left[-(u,v)M^{-1}(u,v)^T\right] \\ &= \boxed{\tfrac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_X^2(\tau)}} \exp\left[-(u,v)M^{-1}(u,v)^T\right]} \end{aligned}$$

Puisque

$$E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] = \iint e^u e^v f(u,v) du dv,$$

d'après l'expression précédente de la densité, on en déduit que $Y(t)$ est un processus stationnaire et que sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de σ^2 et de $K_X(\tau)$ (ce sont les seules variables qui apparaissent dans la densité $f(u,v)$).

4) Le théorème de Price s'écrit

$$\frac{\partial E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right]}{\partial E\left[X(t)X(t-\tau)\right]} = E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial K_Y(\tau)}{\partial K_X(\tau)} = E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] \Leftrightarrow \frac{\partial K_Y(\tau)}{K_Y(\tau)} = \partial K_X(\tau)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\ln|K_Y(\tau)| = K_X(\tau) + \text{constante} \Leftrightarrow \boxed{K_Y(\tau) = C\exp\left[K_X(\tau)\right]}$$

La constante C peut se déterminer en faisant $\tau = 0$ puisque d'après la question 2)

$$K_Y(0) = E\left[Y^2(t)\right] = \exp\left(2\sigma^2\right)$$

et

$$C\exp\left[K_X(0)\right] = C\exp\left(\sigma^2\right)$$

En égalant ces deux termes, on obtient

$$C = \frac{\exp\left(2\sigma^2\right)}{\exp\left(\sigma^2\right)} = \exp\left(\sigma^2\right)$$

d'où le résultat final

$$\boxed{K_Y(\tau) = \exp\left[K_X(\tau) + \sigma^2\right]}$$