Correction Examen Traitement du Signal
avril 2005

Exercice 1 : échantillonnage à porte analogique

1) Le signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e est défini par

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

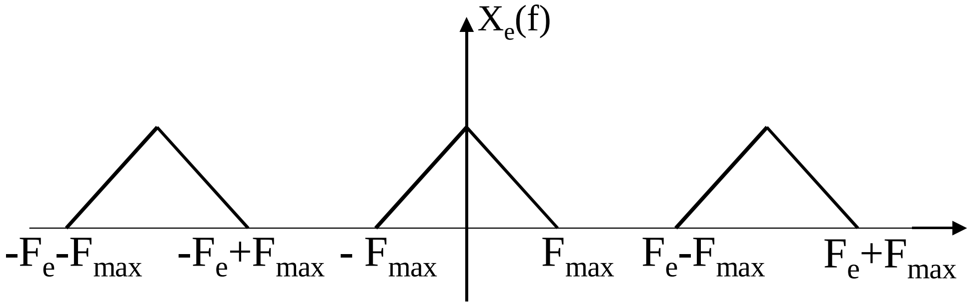
La transformée de Fourier de $x_e(t)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) \\ &= F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

Lorsque $x(t) = F_{\max} \left[\frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t} \right]^2$, on a

$$X(f) = \Lambda_{F_{\max}}(f)$$

et donc pour $F_e > 2F_{\max}$, on obtient la représentation suivante



2) On désire restituer le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de transmittance $H_r(f) = \Pi_{F_e}(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_r(t)$. Puisque

$$h_r(t) = TF^{-1}[H_r(f)] = F_e \sin c\,(\pi F_e t)\,,$$

on a

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_e(t) * h_r(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) * h_r(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) h_r(t-kT_e) \\ &= F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \sin c\left(\pi F_e\left(t-kT_e\right)\right) \end{aligned}$$

Cette dernière expression s'appelle la **formule d'interpolation de Shannon**.
3) Le signal bloqué s'écrit

$$\begin{aligned} x_b(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_\theta\left(t-kT_e-\frac{\theta}{2}\right) \\ &= x(t)\left[\Pi_\theta\left(t-\frac{\theta}{2}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_e)\right] \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de $x_b(t)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} X_b(f) &= X(f) * \left[e^{-j\pi\theta f}\theta \sin c\left(\pi\theta f\right) F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kF_e)\right] \\ &= F_e\theta X(f) * \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta kF_e} \sin c\left(\pi\theta kF_e\right) \delta(f-kF_e)\right] \\ &= F_e\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta kF_e} \sin c\left(\pi\theta kF_e\right) X(f-kF_e) \end{aligned}$$

Lorsqu'on filtre le signal $x_b(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$, on obtient le spectre d'ordre 0 correspondant à $k=0$

$$F_e\theta X(f)$$

Exercice 2 : signal BLU

• $1^{ère}$ partie : étude du filtre de Hilbert
1) La transmittance du filtre de Hilbert est

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t}\left[\cos\left(2\pi ft\right) - j\sin\left(2\pi ft\right)\right] dt \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{\pi t}$ est une fonction impaire, on a

$$H(f) = -j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi ft\right)}{\pi t} dt$$

On fait le changement de variables $u = 2\pi ft$.

- Si $f > 0$, alors on obtient

$$\begin{aligned} H(f) &= -j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u/2f}\frac{du}{2\pi f} \\ &= \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = -j \end{aligned}$$

- Si $f < 0$, alors

$$\begin{aligned} H(f) &= -j\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin u}{u/2f}\frac{du}{2\pi f} \\ &= \frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = j \end{aligned}$$

- Si $f = 0$, alors

$$H(0) = -j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi f t)}{\pi t}dt = 0$$

2) En utilisant les formules de Wiener Lee, on peut déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance de $\widehat{m}(t)$:

Densité Spectrale de Puissance

$$\begin{aligned} s_{\widehat{m}}(f) &= s_m(f)\left|H(f)\right|^2, \qquad \forall f \neq 0 \\ &= s_m(f), \qquad \forall f \neq 0 \end{aligned}$$

Fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned} R_{\widehat{m}}(\tau) &= TF^{-1}\left[s_{\widehat{m}}(f)\right] \\ &= TF^{-1}\left[s_m(f)\right] = R_m(\tau) \end{aligned}$$

Puissance

$$\begin{aligned} P_{\widehat{m}} &= \int s_{\widehat{m}}(f)df = R_{\widehat{m}}(0) \\ &= \int s_m(f)df = R_m(0) \\ &= P_m \end{aligned}$$

Les signaux $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$ ont donc même puissance et même fonction d'autocorrélation. Leurs densités spectrales de puissance différent seulement en $f = 0$.

3) En utilisant la formule des interfèrences, on obtient

$$\begin{aligned} R_{m\widehat{m}}(\tau) &= \int 1\left(-j sign(f)\right)^* e^{j2\pi f\tau} s_m(f)df \\ &= j\int sign(f)s_m(f)e^{j2\pi f\tau}df \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} R_{\widehat{m}m}(\tau) &= \int (-jsign(f))\, e^{j2\pi f\tau} s_m(f)df \\ &= -j \int sign(f) e^{j2\pi f\tau} s_m(f)df \\ &= -R_{m\widehat{m}}(\tau) \end{aligned}$$

• $2^{ème}$ **partie :** $m(t)$ **déterministe**
1) On a

$$\begin{aligned} \widehat{M}(f) &= -jsign(f)M(f) \\ &= -jM^+(f) + jM^-(f) \\ &= j\left[M^-(f) - M^+(f)\right] \end{aligned}$$

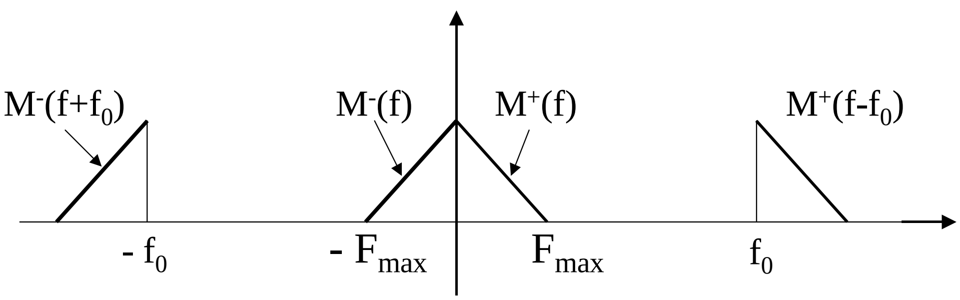
2) La transformée de Fourier de

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \widehat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

est

$$\begin{aligned} X(f) &= M(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right] - \widehat{M}(f) * \left[\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)\right] \\ &= \frac{1}{2}M^+(f - f_0) + \frac{1}{2}M^-(f - f_0) + \frac{1}{2}M^+(f + f_0) + \frac{1}{2}M^-(f + f_0) \\ &\quad -\frac{1}{2}M^-(f - f_0) + \frac{1}{2}M^-(f + f_0) + \frac{1}{2}M^+(f - f_0) - \frac{1}{2}M^+(f + f_0) \\ &= M^+(f - f_0) + M^-(f + f_0) \end{aligned}$$

Le dessin ci-dessous représente un exemple de spectre obtenu avec cette opération



.

On voit donc que la moitié du spectre de $m(t)$ a été déplacée autour de la fréquence porteuse f_0. Le signal obtenu est appelé signal à bande latérale unique.
3) Lorsque $m(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, on a

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) \\ M^+(f) &= \frac{1}{2}\delta(f - f_1), M^-(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_1) \end{aligned}$$

On en déduit

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f - (f_0 + f_1)\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + (f_0 + f_1)\right)$$

• $3^{ème}$ **partie :** $m(t)$ **aléatoire**

1) La moyenne de $x(t)$ est

$$\begin{aligned}
E\left[x(t)\right] &= E\left[m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right) - \widehat{m}(t)\sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] \\
&= E\left[m(t)\right]E\left[\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] - E\left[\widehat{m}(t)\right]E\left[\sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

En effet, $m(t)$ est un message de moyenne nulle et

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{m}(t)\right] &= E\left[\int m(u)h(t-u)du\right] \\
&= \int E\left[m(u)\right]h(t-u)du \\
&= \int 0du = 0
\end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ est

$$\begin{aligned}
E\left[x(t)x(t-\tau)\right] &= E\left[\begin{array}{c}\left\{m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right) - \widehat{m}(t)\sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\right\} \\ \left\{m(t-\tau)\cos\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right) - \widehat{m}(t-\tau)\sin\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right)\right\}\end{array}\right] \\
&= E\left[m(t)m(t-\tau)\right]E\left[\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\cos\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right)\right] \\
&\quad -E\left[m(t)\widehat{m}(t-\tau)\right]E\left[\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\sin\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right)\right] \\
&\quad -E\left[\widehat{m}(t)m(t-\tau)\right]E\left[\sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\cos\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right)\right] \\
&\quad +E\left[\widehat{m}(t)\widehat{m}(t-\tau)\right]E\left[\sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right)\sin\left(2\pi f_0\left(t-\tau\right) + \theta\right)\right] \\
&= R_m(\tau)E\left[\frac{1}{2}\cos\left(2\theta + ...\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0\tau\right)\right] \\
&\quad -R_{m\widehat{m}}(\tau)E\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\theta + ...\right) + \frac{1}{2}\sin\left(-2\pi f_0\tau\right)\right] \\
&\quad -R_{\widehat{m}m}(\tau)E\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\theta + ...\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi f_0\tau\right)\right] \\
&\quad +R_{\widehat{m}}(\tau)E\left[\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0\tau\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\theta + ...\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\left(2\pi f_0\tau\right) + \frac{1}{2}R_{m\widehat{m}}(\tau)\sin\left(2\pi f_0\tau\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}R_{\widehat{m}m}(\tau)\sin\left(2\pi f_0\tau\right) + \frac{1}{2}R_{\widehat{m}}(\tau)\cos\left(2\pi f_0\tau\right)
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on sait que $R_{\widehat{m}}(\tau) = R_m(\tau)$ et $R_{\widehat{m}m}(\tau) = -R_{m\widehat{m}}(\tau)$. On en déduit

$$R_x(\tau) = R_m(\tau)\cos\left(2\pi f_0\tau\right) + R_{m\widehat{m}}(\tau)\sin\left(2\pi f_0\tau\right)$$

Le signal aléatoire $x(t)$ est donc stationnaire.

2) La densité spectrale de puissance de $x(t)$ peut alors se calculer facilement

$$s_x(f) = s_m(f) * \left[\frac{1}{2}\delta\left(f - f_0\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + f_0\right)\right] + s_{m\widehat{m}}(f) * \left[\frac{1}{2j}\delta\left(f - f_0\right) - \frac{1}{2j}\delta\left(f + f_0\right)\right]$$

En utilisant le fait que $s_m(f) = s_m^+(f) + s_m^-(f)$ et $s_{m\widehat{m}}(f) = jsign(f)s_m(f) = j\left[s_m^+(f) - s_m^-(f)\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
s_x(f) &= \frac{1}{2}s_m^+(f-f_0) + \frac{1}{2}s_m^+(f+f_0) + \frac{1}{2}s_m^-(f-f_0) + \frac{1}{2}s_m^-(f+f_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}s_m^+(f-f_0) - \frac{1}{2}s_m^+(f+f_0) - \frac{1}{2}s_m^-(f-f_0) + \frac{1}{2}s_m^-(f+f_0) \\
&= s_m^+(f-f_0) + s_m^-(f+f_0)
\end{aligned}$$

Comme dans le cas d'un message déterministe, la moitié du spectre de $m(t)$ a été déplacée autour de la fréquence porteuse f_0.

3) **Moyenne de** $m(t)$

On a

$$\begin{aligned}
E\left[m(t)\right] &= E\left[A\cos\left(2\pi f_1 t + \phi\right)\right] \\
&= E\left[A\right] E\left[\cos\left(2\pi f_1 t + \phi\right)\right] \\
&= E\left[A\right] \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Fonction d'autocorrélation de $m(t)$

$$\begin{aligned}
R_m(\tau) &= E\left[m(t)m(t-\tau)\right] \\
&= E\left[A^2\right] E\left[\cos\left(2\pi f_1 t + \phi\right)\cos\left(2\pi f_1\left(t-\tau\right) + \phi\right)\right]
\end{aligned}$$

On a

$$E\left[A^2\right] = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

La seconde espèrance a été calculée en cours et en TD

$$\begin{aligned}
E\left[\cos\left(2\pi f_1 t + \phi\right)\cos\left(2\pi f_1\left(t-\tau\right) + \phi\right)\right] &= E\left[\frac{1}{2}\cos\left(2\phi + ...\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_1 \tau\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_1 \tau\right)
\end{aligned}$$

On en déduit la fonction d'autocorrélation de $m(t)$

$$R_m(\tau) = \frac{1}{4}\cos\left(2\pi f_1 \tau\right)$$

et la densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned}
s_m(f) &= \frac{1}{8}\left[\delta\left(f-f_1\right) + \delta\left(f+f_1\right)\right] \\
s_m^+(f) &= \frac{1}{8}\delta\left(f-f_1\right), s_m^-(f) = \frac{1}{8}\delta\left(f+f_1\right)
\end{aligned}$$

On en déduit la densité spectrale de puissance de $x(t)$

$$\begin{aligned}
s_x(f) &= s_m^+(f-f_0) + s_m^-(f+f_0) \\
&= \frac{1}{8}\delta\left(f-(f_0+f_1)\right) + \frac{1}{8}\delta\left(f+f_0+f_1\right)
\end{aligned}$$