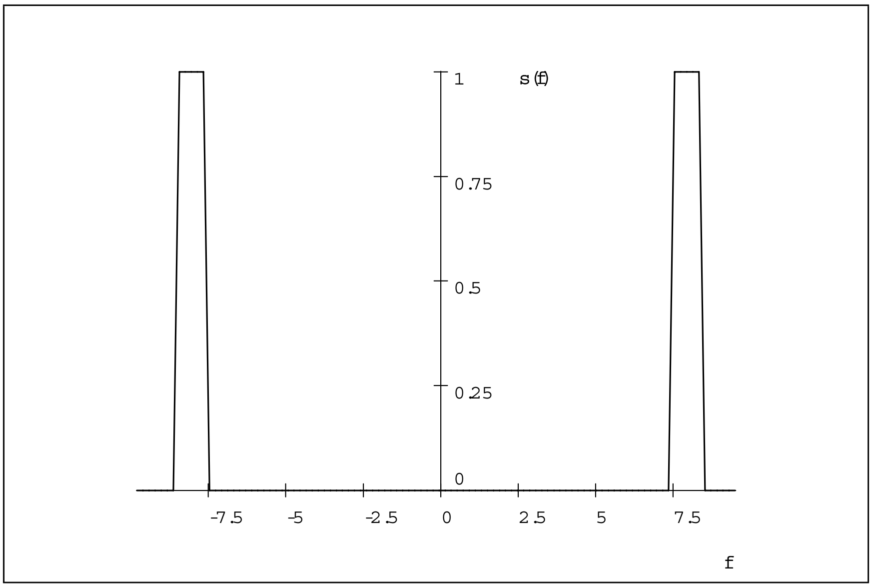
Correction Examen Traitement du Signal
avril 2006

Exercice 1 : Échantillonnage d'un signal passe bande

1) La transformée de Fourier du signal $s(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} S(f) &= S^{+}(f) + S^{-}(f) \\ &= \Pi_B(f) * \delta\left(f - f_0\right) + \Pi_B(f) * \delta\left(f + f_0\right) \\ &= \Pi_B(f - f_0) + \Pi_B(f + f_0) \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques $f_0 = 8kHz$ et $B = 1kHz$, on obtient la représentation suivante



2) Le signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e est défini par

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Fourier de $x_e(t)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) \\ &= F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

La condition de Shannon s'écrit

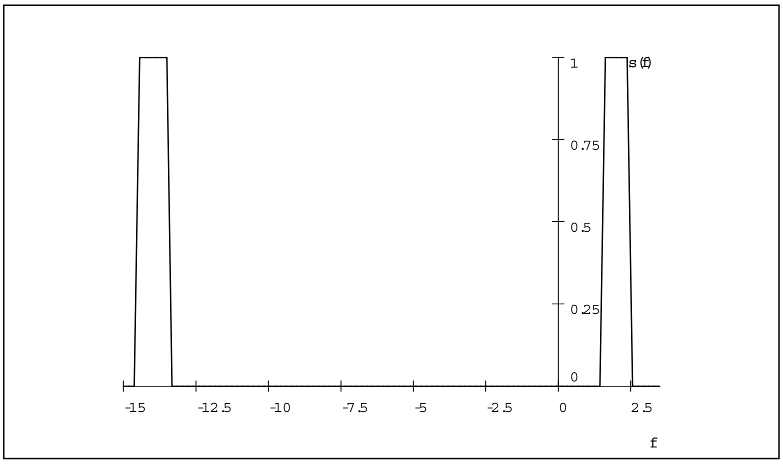
$$F_e > 2F_{\max} = 17kHz$$

3) La relation

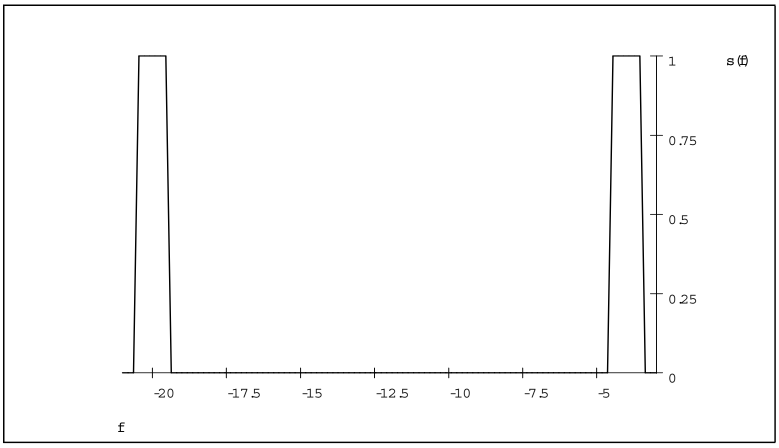
$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e)$$

est toujours valable.

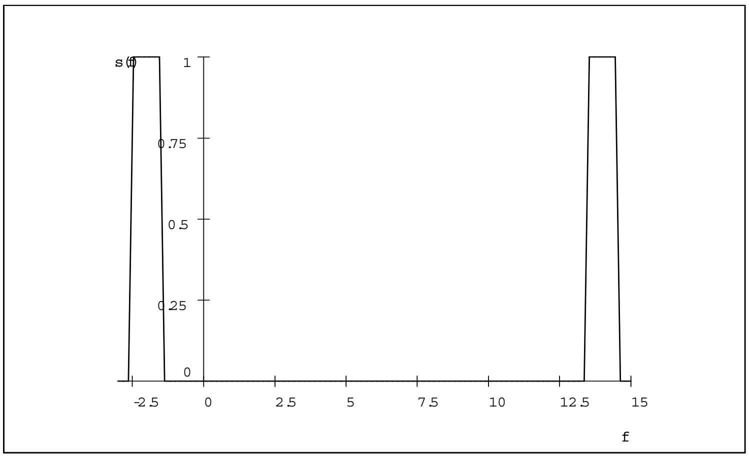
Le spectre d'ordre -1 est $X(f + F_e) = X(f + 6kHz)$ est représenté ci-dessous



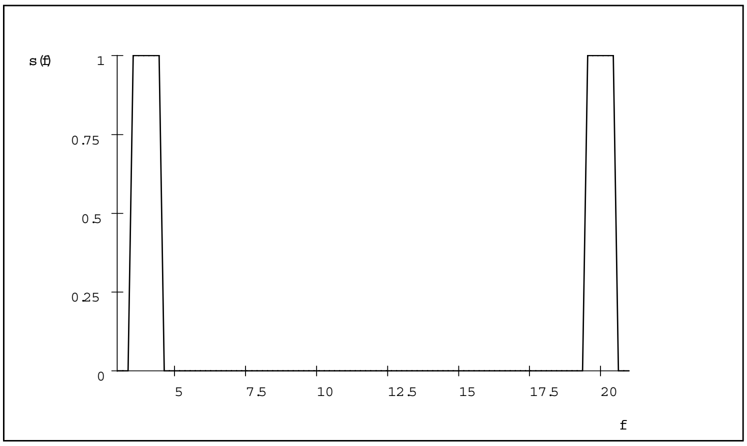
Le spectre d'ordre -2 est $X(f + 2F_e)$ représenté ci-dessus



Le spectre d'ordre 1 est $X(f - F_e) = X(f - 6kHz)$ qui est aussi représenté ci-dessous



Le spectre d'ordre 2 est $X(f - 2F_e)$ qui est représenté ci-dessous



Comme on peut le remarquer sur les trois figures précédentes, les spectres d'ordres $-2, -1, 0, 1$ et 2 ne se chevauchent pas.

- Lorsqu'on filtre le signal échantillonné par $H(f) = \Pi_F(f)$ avec $F = 6kHz$, on récupère un signal dont la transformée de Fourier est

$$\Pi_{B_e}(f - f_1) + \Pi_{B_e}(f + f_1)$$

avec $f_1 = 2kHz$, c'est à dire

$$x_r(t) = 2B \cos(2\pi f_1 t) \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$$

- Lorsqu'on filtre le signal échantillonné par $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$ avec $f_0 = 8kHz$ et $B = 1kHz$, on récupère le signal $x(t)$.

Il est donc possible de restituer un signal passe-bande échantillonné avec une fréquence d'échantillonnag inférieure à $2F_{\max}$ dans la mesure où les spectres se replient dans les zones où le spectre de $x_e(t)$ est nul.

Exercice 2

1) Le signal $x(t)$ est clairement un signal à énergie finie. En effet, l'énergie de $x(t)$ est

$$E = \int_{\mathbb{R}} x^2(u) du = A^2 T$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est

$$X(f) = A e^{-j\pi f T} T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

La densité spectrale d'énergie de $x(t)$ est donc

$$s_x(f) = |X(f)|^2 = A^2 T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2$$

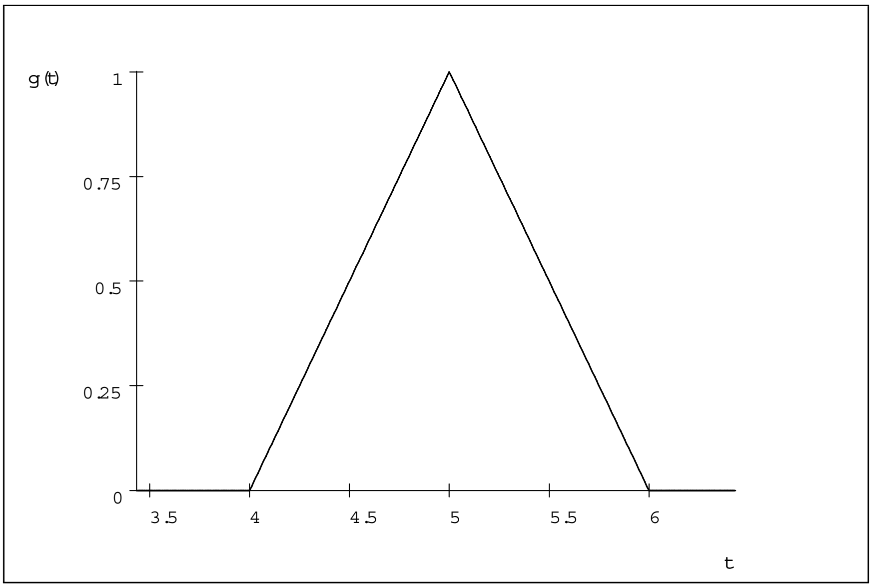
et la fonction d'autocorrélation est obtenue par transformée de Fourier inverse

$$R_x(\tau) = A^2 T \Lambda_T(\tau)$$

2) En l'absence de bruit, on a $r(t) = x(t - t_0)$. La fonction $g(t)$ est alors définie par

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{\mathbb{R}} r(u)x(u-t)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u-t_0)x(u-t)du \\ &= R_x(t-t_0) \end{aligned}$$

La fonction $g(t)$ est représentée ci-dessous pour $A = 1, T = 1$ et $t_0 = 5$:



On voit que la fonction $g(t)$ présente un pic pour $t = t_0$, ce qui permet d'estimer l'instant t_0.
3) • Un bruit est **blanc** si sa densité spectrale de puissance $s_b(f)$ est constante. Un bruit est **Gaussien** si la loi des amplitudes de ce bruit est une loi normale.

• L'opération qui associe au signal aléatoire $r(t)$ le signal $g(t)$ est une opération linéaire et invariante dans le temps. Donc elle définit une opération de filtrage linéaire invariant dans le temps. La transmittance est par exemple obtenue en utilisant l'isométrie

$$r(t) \rightleftharpoons e^{j2\pi ft}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} r(u)x(u-t)du &\rightleftharpoons \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi fu}x(u-t)du \\ &\rightleftharpoons \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi f(v+t)}x(v)dv \\ &\rightleftharpoons e^{j2\pi ft}\int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi fv}x(v)dv \\ &\rightleftharpoons e^{j2\pi ft}X(-f) \end{aligned}$$

où $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$. La transmittance de ce filtre est donc

$$H(f) = X(-f)$$

et sa réponse impulsionnelle s'écrit

$$h(t) = x(-t)$$

- Lorsque $r(t) = x(t-t_0) + b(t)$, on a par linéarité

$$g(t) = R_x(t-t_0) + \int_{\mathbb{R}} b(u)x(u-t)du$$

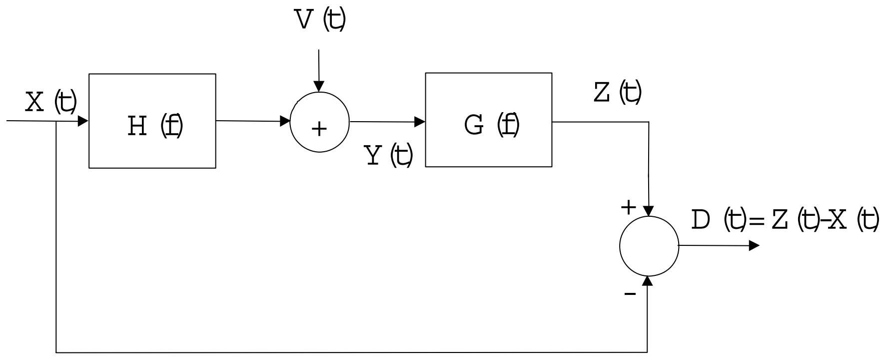
La fonction $g(t)$ s'écrit donc comme la somme d'un terme déterministe (obtenu en absence de bruit) et d'un terme aléatoire de moyenne

$$E\left[\int_{\mathbb{R}} b(u)x(u-t)du\right] = \int_{\mathbb{R}} E\left[b(u)\right]x(u-t)du = 0$$

En présence de bruit, la fonction $g(t)$ est donc le triangle précédent $R_x(t-t_0)$ sur lequel se superposent des oscillations (parfois positives, parfois négatives) dues au bruit. Si le bruit n'est pas trop important, on devrait pouvoir estimer t_0 à l'aide du maximum de $g(t)$.

Exercice 3

On considère le système représenté sur la figure ci-dessous



1) On a

$$E\left[(X_1(t)+X_2(t))\left(X_1^*(t-\tau)+X_2^*(t-\tau)\right)\right] = R_{X_1}(\tau) + E\left[X_1(t)X_2^*(t-\tau)\right] + E\left[X_2(t)X_1^*(t-\tau)\right] + R_{X_2}(\tau)$$

En utilisant l'indépendance entre les deux signaux, il vient

$$\begin{aligned} E\left[X_1(t)X_2^*(t-\tau)\right] &= E\left[X_1(t)\right]E\left[X_2^*(t-\tau)\right] = 0 \\ E\left[X_2(t)X_1^*(t-\tau)\right] &= E\left[X_2(t)\right]E\left[X_1^*(t-\tau)\right] = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$E\left[\left(X_1(t)+X_2(t)\right)\left(X_1^*(t-\tau)+X_2^*(t-\tau)\right)\right]=R_{X_1}(\tau)+R_{X_2}(\tau)$$

soit

$$R_{X_1+X_2}(\tau)=R_{X_1}(\tau)+R_{X_2}(\tau)$$

où

$$s_{X_1+X_2}(f)=s_{X_1}(f)+s_{X_2}(f)$$

On a

$$Y(t)=V(t)+X(t)*h(t)$$

Puisque $V(t)$ et $X(t)$ sont indépendants, $V(t)$ et $X_f(t)=X(t)*h(t)$ le sont aussi. Puisque $E\left[V(t)\right]=0$, en utilisant le résultat précédent, on obtient

$$s_Y(f)=s_V(f)+s_{X_f}(f)$$

La densité spectrale de puissance de $X_f(t)$ se calcule à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$s_{X_f}(f)=s_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

On en déduit

$$s_Y(f)=s_V(f)+s_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

2) Le signal temporel $Z(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} Z(t) &= Y(t)*g(t) \\ &= V(t)*g(t)+X(t)*h(t)*g(t) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} Z_V(t) &= V(t)*g(t) \\ Z_X(t) &= X(t)*h(t)*g(t) \end{aligned}$$

Puisque $Z_V(t)$ et $Z_X(t)$ sont indépendants et que

$$E\left[Z_V(t)\right]=\int_{\mathbb{R}} E\left[V(u)\right]g(t-u)du=0,$$

on a, en utilisant les relations de Wiener-Lee

$$s_Z(f)=s_V(f)\left|G(f)\right|^2+s_X(f)\left|H(f)\right|^2\left|G(f)\right|^2$$

3) Dans le cas où le rapport signal à bruit du système est important, on a

$$s_Z(f)\simeq s_X(f)\left|H(f)\right|^2\left|G(f)\right|^2$$

Pour avoir $s_Z(f)\simeq s_X(f)$, il suffit donc de choisir

$$G(f)=H^{-1}(f)$$

4) On a

$$\begin{aligned} R_{XZ}(\tau) &= E\left[X(t)Z^*(t-\tau)\right] \\ &= E\left[X(t)Z_V^*(t-\tau)\right] + E\left[X(t)Z_X^*(t-\tau)\right] \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance entre $X(t)$ et $V(t)$ et le fait que $V(t)$ est de moyenne nulle, on obtient

$$E\left[X(t)Z_V^*(t-\tau)\right] = 0$$

En utilisant la formule des interfèrences, on obtient

$$E\left[X(t)Z_X^*(t-\tau)\right] = \int_{\mathbb{R}} H^*(f)\, G^*(f) s_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

On en déduit

$$s_{XZ}(f) = TF\left[E\left[X(t)Z^*(t-\tau)\right]\right] = H^*(f)G^*(f)s_X(f)$$

De même

$$s_{ZX}(f) = TF\left[E\left[Z(t)X^*(t-\tau)\right]\right] = H(f)G(f)s_X(f)$$

On a

$$\begin{aligned} E\left[D(t)\, D^*(t-\tau)\right] &= E\left(\left[Z(t)-X(t)\right]\left[Z^*(t-\tau)-X^*(t-\tau)\right]\right) \\ &= E\left[Z(t)Z^*(t-\tau)\right] - E\left[Z(t)X^*(t-\tau)\right] - E\left[X(t)Z^*(t-\tau)\right] + E\left[X(t)X^*(t-\tau)\right] \end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance de $D(t)$ s'écrit donc

$$s_D(f) = s_Z(f) - s_{ZX}(f) - s_{XZ}(f) + s_X(f)$$

En utilisant les expressions précédentes des différentes DSP et des interspectres, on obtient

$$\begin{aligned} s_D(f) &= s_V(f)\left|G(f)\right|^2 + s_X(f)\left|H(f)\right|^2\left|G(f)\right|^2 - H(f)G(f)s_X(f) - H^*(f)G^*(f)s_X(f) + s_X(f) \\ &= A(f)s_V(f) + B(f)s_X(f) \\ &= \left|G(f)\right|^2 s_V(f) + \left|H(f)\right|^2\left|G(f)-H^{-1}(f)\right|^2 s_X(f), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A(f) &= \left|G(f)\right|^2 \\ B(f) &= \left|H(f)\right|^2\left|G(f)\right|^2 - H(f)G(f) - H^*(f)G^*(f) + 1 \\ &= \left|H(f)\right|^2\left|G(f)-H^{-1}(f)\right|^2 \end{aligned}$$

Si le bruit est suffisament "faible" pour avoir

$$s_D(f) \simeq B(f)s_X(f) = \left|H(f)\right|^2\left|G(f)-H^{-1}(f)\right|^2 s_X(f),$$

on voit que pour avoir $s_D(f) \simeq 0$, il suffit de choisir

$$G(f) = H^{-1}(f)$$