EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 19 Décembre 2022 (16h00-17h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Stationarité et ergodicité (3 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ stationnaire de moyenne $E[x(t)] = m \neq 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On considère une variable aléatoire réelle A de moyenne nulle et de variance $\sigma_A^2 > 0$ indépendante du signal $x(t)$. On forme le signal

$$y(t) = Ax(t).$$

1. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire ?
   La moyenne de $x(t)$ est
   $$E[y(t)] = E[Ax(t)] = E[A]E[x(t)] = 0,$$
   où on a utilisé l'indépendance entre a et $x(t)$. La fonction d'autocorrélation de $y(t)$ est
   $$E[y(t)y^*(t-\tau)] = E[A^2x(t)x^*(t-\tau)] = E[A^2]E[x(t)x^*(t-\tau)] = \sigma_A^2 R_x(\tau),$$
   où on a utilisé l'indépendance entre A et $x(t)$ qui implique l'indépendance entre A^2 et $x(t)x^*(t-\tau)$. La densité spectrale de puissance est donc
   $$s_y(f) = \text{TF}[R_y(\tau)] = \sigma_A^2 s_x(f).$$
   Comme la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ sont indépendantes du temps, le signal $y(t)$ est stationnaire.

2. On suppose que le signal $x(t)$ est ergodique au premier ordre (pour la moyenne). Le signal $y(t)$ est-il ergodique au premier ordre ?
   Le signal $y(t)$ est ergodique pour la moyenne si $S_y(0^+) - S_y(0^-) - |m_y|^2 = 0$ avec $m_y = E[y(t)]$. Mais
   $$S_y(0^+) - S_y(0^-) - |m_y|^2 = \sigma_A^2[S_x(0^+) - S_x(0^-)] - |0|^2 = \sigma_A^2 m^2$$
   car $x(t)$ est ergodique au premier ordre, ce qui signifie $S_x(0^+) - S_x(0^-) - |m_x|^2 = S_x(0^+) - S_x(0^-) - m^2 = 0$. Comme $\sigma_A^2 > 0$ et $m \neq 0$, on a $S_y(0^+) - S_y(0^-) - |m_y|^2 \neq 0$ et donc $y(t)$ n'est pas ergodique au premier ordre.

Exercice 2 : Équation différentielle (3 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne $E[x(t)] = 0$ et de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = a^2\delta(\tau)$, où a est une constante. Un autre signal aléatoire $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = x(t).$$

1. Déterminer $x(t)$ lorsque $y(t) = e^{j2\pi ft}$. En déduire que $x(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $y(t)$ par un filtre de transmittance $H(f) = b + j2\pi df$, où b et d sont deux nombres réels à déterminer. On admet que dans ce cas, $y(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ par un filtre de transmittance $G(f) = \frac{1}{H(f)}$. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse

notée $g(t)$.
Si on remplace $y(t)$ par $e^{j2\pi ft}$, on obtient

$$x(t) = e^{j2\pi ft}[3 + j2\pi f],$$

ce qui signifie que $x(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $y(t)$ par un filtre de transmittance

$$H(f) = 3 + j2\pi f.$$

On en déduit

$$G(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$

et donc, en utilisant les tables de transformées de Fourier

$$g(t) = e^{-3t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

2. Déterminer la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$.
D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$s_y(f) = s_x(f)|G(f)|^2 = a^2 \times \frac{1}{9 + 4\pi^2 f^2}.$$

d'où

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}[s_y(f)] = \frac{a^2}{6}\text{TF}^{-1}\left[\frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2}\right].$$

En utilisant les tables, on en déduit

$$R_y(\tau) = \frac{a^2}{6}e^{-3|\tau|}.$$

Exercice 3 : Valeur absolue d'un processus aléatoire stationnaire (4 **points)**

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = g[x(t)] = |x(t)|$.

1. Déterminer la moyenne du signal $y(t)$ que l'on exprimera en fonction de $R_x(0)$.
On a

$$E[y(t)] = E[|x(t)|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du$$

avec $\sigma^2 = R_x(0)$. Donc

$$E[y(t)] = 2\int_0^{+\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2R_x(0)}{\pi}}.$$

2. Exprimer la dérivée de g en tout point $u \neq 0$ à l'aide de la fonction signe définie par

$$\text{signe}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } \; u > 0 \\ -1 \text{ si } \; u < 0. \end{cases}$$

À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$ en fonction de la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (1pt).
La dérivée de la fonction g est

$$g'(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } & v > 0 \\ -1 \text{ si } & v < 0, \end{cases} = \text{sign}(v).$$

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} =& E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] \\ =& E\left[\text{sign}[x(t)]\text{sign}[x(t-\tau)]\right] \\ =& R_u(\tau). \end{aligned} \tag{1}$$

3. On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (déterminée en TD) est définie par

$$R_u(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$

et qu'on a le résultat suivant

$$\int \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

En déduire $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive notée C (1pt).
En utilisant le rappel et le résultat de la question précédente, on a

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$

soit

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi}R_x(\tau)\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right] + \frac{2}{\pi}R_x(0)\sqrt{1-\frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)}} + C.$$

4. Déterminer la constante C (1pt).
On a

$$C = R_y(0) - R_x(0) - 0 = R_y(0) - R_x(0).$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E[x^2(t)] = R_x(0).$$

D'où $C = 0$.

Transformée de Fourier

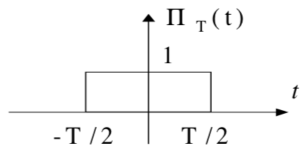
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

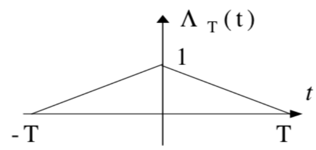
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi nf_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T \sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi Tf)$
$B \sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0)\,f(t) = \delta(t - t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$