EXAMEN SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 3 Décembre 2024 (10h00-11h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Génération d'un signal de DSP positive donnée (4 points)

L'objectif de cet exercice est de générer un signal aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance égale à une fonction positive donnée $g(f)$ d'intégrale bornée, i.e., telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(f)df < \infty$.

1. Déterminer la constante $a \in \mathbb{R}$ (dépendant de g) pour que $p(f) = \frac{g(f)}{a^2}$ soit une densité de probabilité.
   Puisque g est une fonction positive, pour que p soit une densité de probabilité, il suffit d'avoir
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(f)df = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(f)df = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g(f)df}.$$

2. On considère le signal aléatoire
$$x(t) = ae^{j(2\pi ft+\phi)},$$
   où $a > 0$ est une constante positive, f est une fréquence aléatoire de densité de probabilité $p(f) = \frac{g(f)}{a^2}$ et ϕ est une phase aléatoire uniforme sur $]0, 2\pi[$. On suppose également que f et ϕ sont deux variables aléatoires indépendantes.

   - Déterminer la moyenne du signal $x(t)$.
     La moyenne de $x(t)$ est
$$E[x(t)] = E\left[ae^{j(2\pi ft+\phi)}\right] = aE\left[e^{j2\pi ft}\right] \times E\left[e^{j\phi}\right] = 0,$$
     où on a utilisé la relation
$$E\left[e^{j\phi}\right] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{j\phi} d\phi = 0$$
     et l'indépendance entre les variables f et ϕ.
   - Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de $\text{TF}^{-1}[p(f)]$ et de $p(f)$ respectivement.
     La fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ est
$$\begin{aligned} E[x(t)x^*(t-\tau)] =& E\left[ae^{j(2\pi ft+\phi)} \times ae^{-j(2\pi f(t-\tau)+\phi)}\right] \\ =& a^2 E\left[e^{j2\phi f\tau}\right] \\ =& a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\tau} p(f)df \qquad (1) \\ =& a^2 \text{TF}^{-1}[p(f)]. \qquad (2) \end{aligned}$$
     On en déduit que la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ est indépendante de t et on la note $R_x(\tau)$. Comme c'est aussi le cas pour la moyenne de $x(t)$, le signal $x(t)$ est stationnaire au second ordre. La densité spectrale de puissance de $x(t)$ est
$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = a^2 p(f) = g(f).$$

- Conclure
  Le signal $x(t)$ défini ci-dessus est stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance la fonction $g(f)$. On a donc généré un signal aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance $s_x(f) = p(f)$.
- On filtre le signal $x(t)$ précédent avec un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \exp(-|t|)$. Déterminer la densité spectrale de puissance du signal filtré $y(t) = x(t) * h(t)$.
  En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient :

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 = \frac{2g(f)}{(1+4\pi^2 f^2)^2}.$$

Exercice 2 : Ecrêtage souple (6 **points)**

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. L'objectif de cet exercice est de calculer la fonction d'autocorrélation du signal $y(t) = g[x(t)]$ avec

$$g(u) = \frac{1}{2K}\text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2a}}\right), \text{ avec } a > 0 \text{ et } \text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-v^2}dv.$$

On rappelle que la loi du couple $(U, V) = (x(t), x(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(u,v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U,V) \\ \text{cov}(U,V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

et qu'on a le résultat suivant : pour tout vecteur Gaussien $\boldsymbol{Z} = (U, V)^T$ de vecteur moyenne nul et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$

$$E\left[e^{s\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}}\right] = [\det(\mathbb{I}_2 - 2s\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma})]^{-1/2}, \tag{3}$$

où $s \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Q}$ est une matrice symétrique réelle de taille 2×2, $\mathbb{I}_2$ est la matrice identité de taille 2×2 et $\det(\boldsymbol{A})$ est le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$.

1. (2pts) Montrer que si $(U, V) = (x(t), x(t-\tau))$, on a $\text{var}(U) = \text{var}(V) = R_x(0)$ et $\text{cov}(U, V) = R_x(\tau)$. En utilisant (3), montrer que

$$E\left[e^{-\frac{1}{2a}[x^2(t)+x^2(t-\tau)]}\right] = \left[\left(1+\frac{R_x(0)}{a}\right)^2 - \frac{R_x^2(\tau)}{a^2})\right]^{-1/2}.$$

   On a vu en cours que

$$\text{var}(U) = \text{var}[x(t)] = E[x^2(t)] = R_x(0) \text{ et } \text{var}(V) = \text{var}[x(t-\tau)] = E[x^2(t-\tau)] = R_x(0).$$

   De plus

$$\text{cov}(U,V) = E[x(t)x(t-\tau)] = R_x(\tau).$$

   En utilisant l'indication avec $s = -\frac{1}{2a}$ et $\boldsymbol{Q} = \mathbb{I}_2$, on obtient bien

$$E\left[e^{-\frac{1}{2a}[x^2(t)+x^2(t-\tau)]}\right] = \left[\left(1+\frac{R_x(0)}{a}\right)^2 - \frac{R_x^2(\tau)}{a^2})\right]^{-1/2}.$$

2. Déterminer la moyenne du signal $y(t)$ (on remarquera que g est une fonction impaire) (1pt).
On a
$$E[y(t)] = E\left\{g[x(t)]\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du$$
avec $\sigma^2 = R_x(0)$. Comme g est une fonction impaire, la fonction sous l'intégrale est également impaire, d'où
$$E[y(t)] = 0.$$

3. (2pts) À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$ en fonction de l'espérance déterminée à la première question. En déduire $R_y(\tau)$ à une constante additive près.
On rappelle la primitive
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Arcsin\left(\frac{u}{a}\right).$$

D'après le théorème de Price
$$\begin{aligned}\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} =& E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right]\\ =& E\left[g'[x(t)]g'[x(t-\tau)]\right]\\ =& \frac{1}{2\pi K^2 a} E\left[e^{-\frac{1}{2a}[x^2(t)+x^2(t-\tau)]}\right].\end{aligned} \tag{4}$$
En utilisant le résultat de la première question, on obtient
$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{1}{2\pi K^2}\frac{1}{\sqrt{(a+R_x(0))^2 - R_x^2(\tau)}}$$
d'où
$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi K^2}\text{Arcsin}\left(\frac{R_x(\tau)}{a+R_x(0)}\right) + C.$$
On ne demandait pas de déterminer la constante C. Mais on pourrait le faire en remarquant que $\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = 0$, ce qui permet d'obtenir
$$C = \lim_{\tau\to\infty} R_y(\tau) = E^2[y(t)] = 0.$$
Remarque : ce résultat est issu l'article de R. F. Baum intitulé "The Correlation Function of Smoothly Limited Gaussian Noise" publié dans la revue IRE Transactions on Information Theory en septembre 1957 (vol. 3, no. 3).

Transformée de Fourier

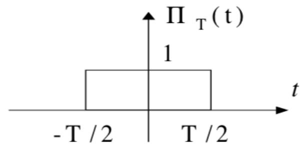
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

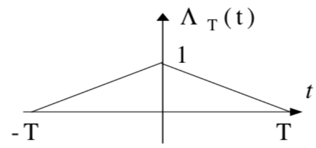
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array}\right.$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi n f_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0)\,f(t) = \delta(t - t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$