EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

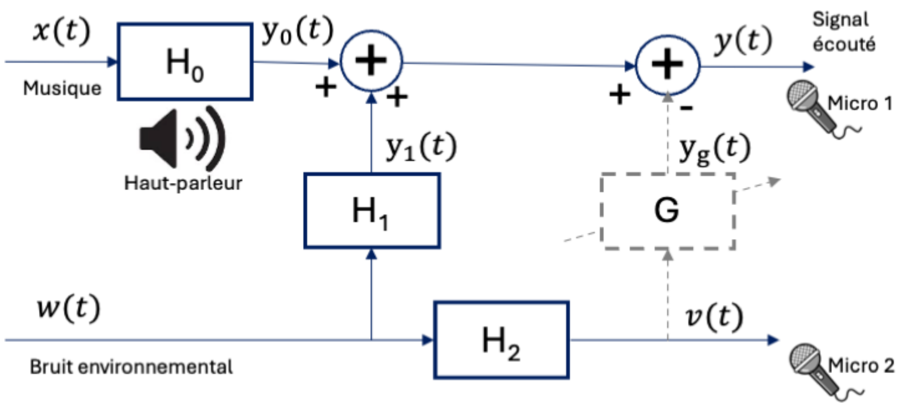
Mardi 2 Décembre 2025 (10h15-11h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Réduction de bruit (6 points)

Le schéma de principe d'un casque (écouteur) à réduction de bruit environnemental est décrit ci-dessous. Nous souhaitons écouter de la musique $x(t)$ transmise sur un haut-parleur au travers d'un filtre de transmittance inconnue $H_0(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_0(t)$, mais le signal en sortie du haut-parleur $y_0(t)$ est perturbé par un bruit additif d'environnement inconnu $w(t)$, qui a été filtré par un filtre de transmittance inconnue $H_1(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_1(t)$. Nous mesurons le signal reçu par l'oreille $y(t)$ avec le microphone 1. Un microphone supplémentaire (Micro 2) capte également le signal $v(t)$ qui est le bruit filtré par un filtre inconnu de transmittance $H_2(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_2(t)$.

Nous souhaitons concevoir un filtre $G(f)$ annulateur de bruit tel que le bruit affectant le signal reçu $y(t)$ soit parfaitement annulé. Tous les signaux considérés dans cet exercice sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.



1. Le signal reçu par le microphone 1 est $y(t) = y_0(t)+y_1(t)-y_g(t)$, où $y_0(t)$ est le terme dépendant du signal $x(t)$ et de $h_0(t)$ (sortie du filtre de transmittance H_0), $y_1(t)$ est le terme dépendant du bruit $w(t)$ et de $h_1(t)$, et enfin $y_g(t)$ dépend de $w(t)$, $h_2(t)$ et $g(t) = \text{TF}^{-1}[G(f)]$. Déterminer la transmittance idéale $G(f)$ permettant d'annuler le bruit d'environnement $y_1(t) - y_g(t)$. (1pt)
   Le signal reçu par le microphone s'écrit
   $$y(t) = x(t) * h_0(t) + w(t) * h_1(t) - w(t) * h_2(t) * g(t).$$
   Pour annuler le terme de bruit, il suffit donc de choisir $g(t)$ tel que
   $$w(t) * h_1(t) = w(t) * h_2(t) * g(t).$$
   Comme cette condition doit être vérifiée pour tout bruit $w(t)$, on obtient
   $$h_1(t) = h_2(t) * g(t) \Leftrightarrow H_1(f) = H_2(f)G(f) \Leftrightarrow G(f) = H_2^{-1}(f)H_1(f).$$
   Attention, la transformée de Fourier de $w(t)$ n'est pas définie. Donc, on ne peut pas calculer la transformée de Fourier de l'équation $w(t) * h_1(t) = w(t) * h_2(t) * g(t)$.

2. Les signaux $x(t)$ et $w(t)$ sont supposés aléatoires stationnaires de densités spectrales de puissance $s_x(f)$ et $s_w(f)$. On suppose également que le bruit $w(t)$ est de moyenne nulle et que les signaux $x(t)$ et $w(t)$ sont indépendants.

   - Déterminer $s_v(f)$ en fonction de $H_2(f)$ et $s_w(f)$ (1pt).
     Puisque $v(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $w(t)$, d'après la relation de Wiener-Lee, on a
     $$s_v(f) = s_w(f)|H_2(f)|^2.$$

   - On rappelle que d'après la formule des interférences, si $y_1(t) = w(t) * h_1(t)$ et $y_2(t) = w(t) * h_2(t)$ alors
     $$s_{y_1 y_2}(f) = \text{TF}[R_{y_1 y_2}(\tau)] = s_w(f) H_1(f) H_2^*(f),$$
     où $R_{y_1 y_2}(\tau)] = E[y_1(t) y_2(t-\tau)]$ est la fonction d'intercorrélation entre les signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$. En l'absence du filtre annulateur G, montrer que $R_{yv}(\tau) = E[y(t)v(t-\tau)] = E[y_1(t)v(t-\tau)]$, où $y_1(t)$ et $v(t)$ ont été définis ci-dessus. En déduire $s_{yv}(f) = \text{TF}[R_{yv}(\tau)]$ en fonction de $s_w(f)$, $H_1(f)$ et $H_2(f)$ (2pts).
     La fonction d'autocorrélation entre $y(t)$ et $v(t)$ est définie par
     $$R_{yv}(\tau) = E[y(t)v(t-\tau)] = E\{[x(t) * h_0(t) + w(t) * h_1(t)][w(u) * h_2(u)|_{u=t-\tau}]\}.$$
     En utilisant l'indépendance entre les signaux $w(t)$ et $x(t)$ et le fait que $w(t)$ est de moyenne nulle, on obtient
     $$E\{[x(t) * h_0(t)][w(u) * h_2(u)|_{u=t-\tau}]\} = E[x(t) * h_0(t)] E[w(u) * h_2(u)|_{u=t-\tau}] = 0,$$
     d'où
     $$R_{yv}(\tau) = E\{[w(t) * h_1(t)][w(u) * h_2(u)|_{u=t-\tau}]\} = E[y_1(t)v(t-\tau)]$$
     avec $y_1(t) = w(t) * h_1(t)$ et $v(t) = w(t) * h_2(t)$. On en déduit
     $$s_{yv}(f) = s_w(f) H_1(f) H_2^*(f).$$

   - Déduire des résultats précédents, l'expression de la transmittance du filtre annulateur de bruit $G(f)$ en fonction de $s_v(f)$ et de $s_{yv}(f)$ (1pt). En déduire comment déterminer ce filtre dans la situation pratique où on ne connait pas les transmittances $H_1(f)$ et $H_2(f)$ (1pt).
     En utilisant les expressions précédentes de $s_v(f)$ et de $s_{yv}(f)$, on en déduit
     $$\frac{s_{yv}(f)}{s_v(f)} = \frac{s_w(f) H_1(f) H_2^*(f)}{s_w(f) H_2(f) H_2^*(f)} = H_1(f) H_2^{-1}(f) = G(f).$$
     Dans la situation pratique où on ne connait pas les transmittances $H_1(f)$ et $H_2(f)$, il suffit donc d'estimer les densités spectrales $s_{yv}(f)$ et $s_v(f)$ à partir de $y(t)$ et de $v(t)$, c'est-à-dire à partir des signaux reçus par les microphones 1 et 2.

Exercice 2 : Puissance $n$ème d'un signal aléatoire (4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que la fonction d'autocorrélation du signal $y_n(t) = x^n(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$ notée $R_n(\tau)$ est une fonction polynomiale de degré n de $R_x(\tau)$.

1. (1pts) Déterminer $R_{y_2}(\tau)$ pour $n = 2$ à une constante additive près et en déduire que le résultat est vrai pour $n = 2$.
   Ce résultat a été déterminé en cours et découle du théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} =& E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] \\ =& E\left[2x(t)2x(t-\tau)\right] \\ =& 4R_x(\tau). \end{aligned} \tag{1}$$

   En intégrant cette équation, on obtient

$$R_2(\tau) = 2R_x^2(\tau) + K,$$

   qui est une fonction polynomiale de degré 2 de $R_x(\tau)$.

2. On suppose que la fonction d'autocorrélation de $y_n(t)$ est

$$R_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} a_k R_x^k(\tau).$$

   Déterminer la fonction d'autocorrélation de $y_{n+1}(t)$ en fonction des coefficients a_k, de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive K (2pt).
   En utilisant le théorème de Price, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{n+1}(\tau)}{\partial R_x(\tau)} =& E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] \\ =& E\left[(n+1)x^n(t) \times (n+1)x^n(t-\tau)\right] \\ =& (n+1)^2 R_n(\tau) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} a_k R_x^k(\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

   En intégrant cette équation, on obtient

$$R_{n+1}(\tau) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{R_x^{k+1}(\tau)}{k+1} + K = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)^2}{k+1} a_k R_x^{k+1}(\tau) + K,$$

   qui est bien une fonction polynomiale de degré $n+1$ de $R_x(\tau)$, ce qui termine la récurrence.

3. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}.$$

   Déterminer la constante additive K en fonction des coefficients a_k et de $R_x(0)$ (1pt).
   Pour $\tau = 0$, on a

$$K = R_{n+1}(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)^2}{k+1} a_k R_x^{k+1}(0).$$

En utilisant le rappel, on a

$$R_{n+1}(0) = E[y^{2n+2}(0)] = [(2n+1) \times ... \times 3 \times 1] R_x^{n+1}(0).$$

d'où

$$K = [(2n+1) \times ... \times 3 \times 1] R_x^{n+1}(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)^2}{k+1} a_k R_x^{k+1}(0).$$

Transformée de Fourier

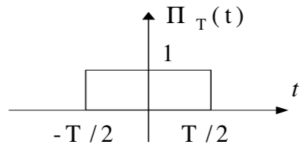
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}}x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}}X(f)e^{i2\pi ft}df$$

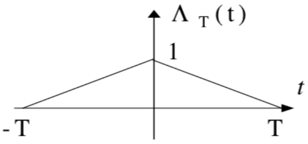
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases}\text{Re}\{X(f)\}\text{ paire}\\ \text{Im}\{X(f)\}\text{ impaire}\\ \lvert X(f)\rvert\text{ pair}\\ \arg\{X(f)\}\text{ impaire}\end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\,.\,y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\,.\,Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\,X(f)$
$(-i2\pi t)^n\,x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}}x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}}X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}}\lvert x(t)\rvert^2\,dt=\int_{\mathbb{R}}\lvert X(f)\rvert^2\,df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{+i2\pi nf_0t}\rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\delta\left(f-nf_0\right)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos\left(2\pi f_0t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2f^2}{a^2})$
$e^{-a^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c\left(\pi Tf\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi Tf\right)$
$B\sin c\left(\pi Bt\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi Bt\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T\left(t\right)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\;\Lambda_T\left(t\right)$

$$\delta\left(t\right)=\begin{cases}0\text{ si }t\neq0\\+\infty\text{ si }t=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{R}}\delta\left(t\right)dt=1$$

$$\delta\left(t-t_0\right)f(t)=\delta\left(t-t_0\right)f(t_0)$$

$$\delta\left(t-t_0\right)*f(t)=f(t-t_0)$$