EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 15 Décembre 2021

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : filtrage (2 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s(f)$. On construit le signal $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = X'(t) - X''(t)$$

où $X'(t)$ et $X''(t)$ sont les dérivées première et seconde du processus aléatoire $X(t)$.

1. Montrer que $Z(t)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la transmittance.
   Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ et de vérifier qu'elle s'écrit $\exp(j2\pi ft)H(f)$, où $H(f)$ est une quantité indépendante de t qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ est
   $$(j2\pi f)\exp(j2\pi ft) - (j2\pi f)^2 \exp(j2\pi ft) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$
   avec
   $$H(f) = j2\pi f + 4\pi^2 f^2.$$

2. Déterminer la densité spectrale de puissance de $Z(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.
   D'après la relation de Wiener-Lee, on a
   $$s_Z(f) = s(f)|H(f)|^2 = s(f)(4\pi^2 f^2)(1 + 4\pi^2 f^2).$$

Exercice 2 : Ergodicité (4 points)

On considère le signal $X(t)$ défini par $X(t) = X_1(t) + AX_2(t)$, où A est une variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$ (i.e., $P[A = 0] = P[A = 1] = 1/2$), et $X_1(t), X_2(t)$ sont deux signaux aléatoires stationnaires de moyennes m_1 et m_2, de fonctions d'autocorrélation $R_1(\tau)$ et $R_2(\tau)$ et de densités spectrales de puissance $s_1(f)$ et $s_2(f)$. On suppose également que $A, X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont mutuellement indépendants.

1. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.
   On a
   $$E[X(t)] = E[X_1(t) + AX_2(t)] = m_1 + \frac{m_2}{2}.$$
   De plus
   $$E[X(t)X(t-\tau)] = E\{[X_1(t) + AX_2(t)][X_1(t-\tau) + AX_2(t-\tau)]\}$$
   En développant, on obtient
   $$R_X(\tau) = R_1(\tau) + \frac{1}{2}R_2(\tau) + m_1 m_2.$$
   La densité spectrale de puissance de $X(t)$ s'écrit donc
   $$s_X(f) = s_1(f) + \frac{1}{2}s_2(f) + m_1 m_2 \delta(f).$$

2. En supposant que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont des signaux aléatoires ergodiques au premier ordre, à quelles conditions sur m_1 et m_2 le signal aléatoire $X(t)$ est-il également ergodique au premier ordre ?
On a
$$S_X(f) = S_1(f) + \frac{1}{2}S_2(f) + m_1 m_2 U(f).$$
Donc
$$\Delta S_X(0) = S_X(0^+) - S_X(0^-) = \Delta S_1(0) + \frac{1}{2}\Delta S_2(0) + m_1 m_2.$$
Le signal $X(t)$ est ergodique au premier ordre si $\Delta S_X(0) - \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2 = 0$. Comme $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont ergodiques au premier ordre, on a $\Delta S_1(0) = m_1^2$ et $\Delta S_2(0) = m_2^2$. Donc
$$\Delta S_X(0) - \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2 = m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + m_1 m_2 - \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m_2^2.$$
Le signal aléatoire $X(t)$ est-il donc ergodique au premier ordre si et seulement si $m_2 = 0$

Exercice 3 (4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = g[x(t)]$ avec
$$g(v) = \begin{cases} Av \text{ si } v \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
où A est une constante strictement positive ($A > 0$).

1. Montrer que $E\{\text{sign}[x(t)]\} = 0$ (1pt).

$$\begin{aligned} E\{\text{sign}[x(t)]\} &= P[x(t) > 0] - P[x(t) < 0] \\ &= 2P[x(t) > 0] - 1 \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}\right] dx(t) - 1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Exprimer la dérivée de g en tout point $u \neq 0$ en fonction de la fonction sign définie par
$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ u > 0 \\ -1 \text{ si } \ u < 0. \end{cases}$$
À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$ en fonction de la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (1pt).
La dérivée de la fonction g est
$$g'(v) = AU(v) = \begin{cases} A \text{ si } \ v > 0 \\ 0 \text{ si } \ v < 0, \end{cases}$$
où U est l'échelon de Heaviside, soit $g'(v) = AU(v) = \frac{A}{2}\left[1 + \text{sign(v)}\right]$. D'après le théorème de Price
$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] \\ &= \frac{A^2}{4} E\left\{(1 + \text{sign}[x(t)])(1 + \text{sign}[x(t-\tau)])\right\} \\ &= \frac{A^2}{4}[1 + R_u(\tau)]. \end{aligned} \tag{2}$$

3. On rappelle que la la fonction d'autocorrélation du signal $u(t) = \text{sign}[x(t)]$ (déterminée en TD) est définie par
$$R_u(\tau) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$
et qu'on a le résultat suivant
$$\int \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
En déduire $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive notée C (1pt).
En utilisant le rappel et le résultat de la question précédente, on a
$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{2\pi}\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right]$$
soit
$$R_y(\tau) = \frac{A^2}{4}R_x(\tau) + \frac{A^2}{2\pi}R_x(\tau)\text{Arcsin}\left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}\right] + \frac{A^2}{2\pi}R_x(0)\sqrt{1-\frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)}} + C.$$

4. Déterminer la constante C (1pt).
On a
$$C = R_y(0) - \frac{A^2}{4}R_x(0) - \frac{A^2}{4}R_x(0) - 0 = R_y(0) - \frac{A^2}{2}R_x(0).$$
Mais
$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E\{A^2x^2(t)U^2[x(t)]\}.$$
avec $U[x(t)] = 1$ si $x(t) > 0$ et 0 sinon. Donc
$$R_y(0) = A^2\int_0^\infty x^2(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}\right)d[x(t)] = \frac{A^2}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{2}R_x(0)$$
d'où $C = 0$.

Remarque : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 222 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

Transformée de Fourier

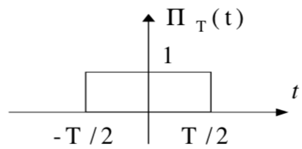
$$X(f)=\int_{\mathbb{R}}x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}}X(f)e^{i2\pi ft}df$$

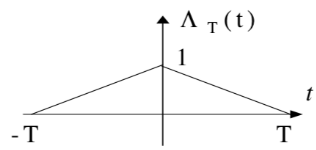
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases}\text{Re}\{X(f)\}\ \text{paire}\\ \text{Im}\{X(f)\}\ \text{impaire}\\ \|X(f)\|\ \text{pair}\\ \arg\{X(f)\}\ \text{impaire}\end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}}x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}}X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}}\|x(t)\|^2dt=\int_{\mathbb{R}}\|X(f)\|^2df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{+i2\pi nf_0t}\rightleftharpoons X(f)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\|f\|}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2f^2}{a^2})$
$e^{-a^2t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases}0\ \text{si}\ t\neq0\\+\infty\ \text{si}\ t=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t-t_0)f(t)=\delta(t-t_0)f(t_0)$$

$$\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$$