EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 15 Décembre 2021

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Filtrage et stationnarité (6 points)

On considère un signal aléatoire $X(t)$ défini par

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

où $X_1(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, $f_0 > 0$ est une constante positive, θ est une phase aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, \pi[$ et X_2 est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_2(f) = \alpha, \forall f$, avec $\alpha > 0$. On suppose également que $X_1(u)$ et $X_2(v)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\forall u \neq v$. On notera que $X_1(t)$ n'est pas le signal étudié en cours car sa phase est uniforme sur l'intervalle $]0, \pi[$ et non pas sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1. (1.5pt) Déterminer la moyenne du signal $X(t)$. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ?
   On a

$$\begin{aligned} E[X(t)] =& E[X_1(t)] + E[X_2(t)] \\ =& \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) d\theta + 0 \\ =& \frac{1}{\pi} [\sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t)] \\ =& \frac{-2}{\pi} [\sin(2\pi f_0 t)] \end{aligned} \tag{1}$$

   Comme $E[X(t)]$ dépend de t, le signal $X(t)$ n'est pas stationnaire.

2. (2pts) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X_1(t)$ notées $R_1(\tau)$ et $s_1(f)$. En déduire la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$.
   Ce calcul est similaire à celui fait en cours et en TD

$$\begin{aligned} E[X_1(t)X_1(t-\tau)] =& \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta) d\theta \\ =& \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} [\cos(4\pi f_0 t + 2\theta - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)] \\ =& \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau). \end{aligned} \tag{2}$$

   d'où

$$s_1(f) = \frac{1}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \,.$$

   La fonction d'autocorrélation de $X(t)$ vérifie

$$E[X(t)X(t-\tau)] = E[X_1(t)X_1(t-\tau)] + E[X_1(t)X_2(t-\tau)] + E[X_2(t)X_1(t-\tau)] + E[X_2(t)X_2(t-\tau)].$$

   Comme $X_1(u)$ et $X_2(v)$ sont indépendants $\forall u, v$ et que $E[X_2(t)] = E[X_2(t-\tau)] = 0$ (stationnarité de $X_2(t)$), on en déduit

$$R_X(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \alpha\delta(\tau)$$

   et

$$s_X(f) = s_1(f) + s_2(f) = \frac{1}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \alpha.$$

3. (1pt) On filtre le signal $X(t)$ à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$ définies par

$$h(t) = \begin{cases} b\exp(-bt) & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } H(f) = \frac{b}{b + j2\pi f}$$

où $b > 0$ est une constante positive. Déterminer les densités spectrales de puissance de $Y_1(t) = X_1(t) * h(t)$ et de $Y_2(t) = X_2(t) * h(t)$, puis celle de $Y(t) = X(t) * h(t)$.
D'après la relation de Wiener Lee, on a

$$\begin{aligned} s_{Y_1}(f) =& s_1(f)|H(f)|^2 \\ =& s_1(f)|H(f)|^2 \\ =& \frac{1}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] \frac{b^2}{b^2 + 4\pi^2 f^2} \\ =& \frac{b^2}{4(b^2 + 4\pi^2 f_0^2)}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

De même

$$s_{Y_2}(f) = s_2(f)|H(f)|^2 = \frac{\alpha b^2}{b^2 + 4\pi^2 f^2}$$

d'où

$$s_Y(f) = \frac{b^2}{4(b^2 + 4\pi^2 f_0^2)}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] + \frac{\alpha b^2}{b^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

4. (1.5pt) Déduire de la question précédente la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$.
En calculant la transformée de Fourier inverse de $s_Y(f)$ et en utilisant les tables, on obtient

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2}{2(b^2 + 4\pi^2 f_0^2)}\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{\alpha b}{2}\exp(-b|\tau|).$$

Exercice 2 : Théorème de Bussgang (5 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un signal aléatoire gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ qui fournit le signal $Y(t)$ défini par

$$Y(t) = g[X(t)] = X^3(t).$$

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$ et à la fonction d'intercorrélation entre $Y(t)$ et $X(t-\tau)$ notée $R_{YX}(\tau)$. On rappelle que la loi du couple $(U,V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u,v)^T\right]$$

où $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U,V) définie par

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U,V) \\ \text{cov}(U,V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}.$$

1. (1pt) Exprimer les éléments de $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que les fonctions d'intercorrélation $R_Y(\tau)$ et $R_{YX}(\tau)$ ne dépendent que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.
Ce résultat a été vu en cours. On a

$$\text{var}(U) = E[X^2(t)] = R_X(0), \text{var}(V) = E[X^2(t-\tau)] = R_X(0)$$

et

$$\text{cov}(U,V) = E[X(t)X(t-\tau)] = R_X(\tau).$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= E[X^3(t)X^3(t-\tau)] \\ &= \int\int u^3 v^3 f(u,v) du dv. \end{aligned} \tag{4}$$

Comme $f(u,v)$ ne dépend que de u, v et des paramètres $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$ (d'après ce qui précède), on en déduit que $R_Y(\tau)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.
De même, la fonction d'intercorrélation entre $Y(t)$ et $X(t-\tau)$ est définie par

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E[Y(t)X(t-\tau)] \\ &= E[X^3(t)X(t-\tau)] \\ &= \int\int u^3 v f(u,v) du dv. \end{aligned} \tag{5}$$

Comme $f(u,v)$ ne dépend que de u, v et des paramètres $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$ (d'après ce qui précède), on en déduit que $R_{YX}(\tau)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2. (1pt) On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = X^3(t)$, $X_2 = X(t-\tau)$ et $Y_2 = g[X_2] = X^3(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$. En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_{X^2}(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$ à une constante additive près notée C.
D'après le théorème de Price

$$\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]} = \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[\frac{dY_1}{dX_1}\frac{dY_2}{dX_2}\right].$$

Mais

$$E\left[\frac{dY_1}{dX_1}\frac{dY_2}{dX_2}\right] = E\left[3X^2(t) \times 3X^2(t-\tau)\right] = 9R_{X^2}(\tau) = 18R_X^2(\tau) + 9R_X^2(0),$$

d'où

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = 18R_X^2(\tau) + 9R_X^2(0).$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = 6R_X^3(\tau) + 9R_X^2(0)R_X(\tau) + C.$$

3. (1pt) Déterminer la constante C.

On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right]\sigma^{2n}.$$

Pour déterminer K, on utilise classiquement l'expression de $R_Y(\tau)$ pour $\tau = 0$, ce qui permet d'obtenir

$$C = R_Y(0) - 6R_X^3(0) - 9R_X^3(0).$$

Comme

$$R_Y(0) = E[X^6(t)] = 15R_X^2(0),$$

on a

$$C = 15R_X^2(0) - 6R_X^3(0) - 9R_X^3(0) = 0.$$

4. (2pts) On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = g[X(t)] = X^3(t)$, $X_2 = X(t-\tau]$ et $Y_2 = X(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$. En déduire $R_{YX}(\tau)$ à une constante additive près notée K. Déterminer ensuite la constante additive K.

D'après le théorème de Price

$$\frac{\partial E[Y_1Y_2]}{\partial E[X_1X_2]} = \frac{\partial R_{YX}(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[\frac{dY_1}{dX_1}\frac{dY_2}{dX_2}\right] = E\left[3X_1^2 \times 1\right] = 3E[X^2(t)] = 3R_X(0).$$

d'où

$$R_{YX}(\tau) = 3R_X(0)R_X(\tau) + K.$$

Pour déterminer K, on utilise classiquement l'expression de $R_{YX}(\tau)$ pour $\tau = 0$, ce qui permet d'obtenir

$$K = R_{YX}(0) - 3R_X^2(0).$$

Mais

$$R_{YX}(0) = E[Y(t)X(t)] = E[X^3(t) \times X(t)] = E[X^4(t)] = 3R_X^2(0),$$

d'où $K = 0$. On peut aussi retrouver ce résultat en faisant $\tau \to \infty$:

$$K = \lim_{\tau \to \infty} R_{YX}(\tau) - 3R_X(0)R_X(\tau) = 0 - 0 = 0$$

car $X(t)$ et $X(t-\tau)$ d'une part, $Y(t) = X^3(t)$ et $X(t-\tau)$ d'autre part, tendent à être indépendants lorsque $\tau \to \infty$ et $E[X(t)] = E[X(t-\tau)] = 0$.

Transformée de Fourier

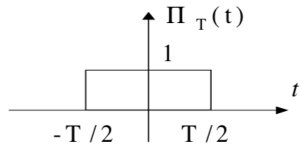
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

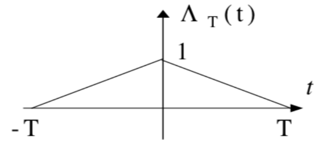
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi n f_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T\sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi T f)$
$B\sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0)\,f(t) = \delta(t - t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$