EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Jeudi 16 janvier 2020 (8h30-9h30)

*Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)*

## Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = \exp\left[j(2\pi f t + \phi)\right]$$

où $f$ est une variable aléatoire de densité $p(f)$ et $\phi$ est une phase constante appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

1. Exprimer la moyenne du signal $x(t)$ en fonction de $\phi$ et de la transformée de Fourier inverse de $p(f)$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire ? Calculer la moyenne de $x(t)$ dans les deux cas suivants
   - $f$ est uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$, où $f_0$ et $\Delta f$ sont des constantes telles que $f_0 > \Delta f$
   - la densité de probabilité de $f$ est gaussienne autour de la fréquence $f_0$, i.e.,

   $$p(f) = \exp[-\pi(f - f_0)^2], \quad f \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$ dans le cas où $f$ est uniforme sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ avec $f_0 > \Delta f$.

## Exercice 2 (3 points)

Un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ doit être transmis dans un canal représenté par un bruit additif stationnaire $b(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_b(f)$. Afin d'améliorer le rapport signal sur bruit, on introduit un filtre à l'émission appelé filtre de préaccentuation de transmittance $H_p(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_p(t)$. Afin de compenser l'effet de ce filtre, on introduit dans le récepteur un filtre appelé filtre de désaccentuation de transmittance $H_d(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_d(t)$. Le système général est représenté ci-dessous

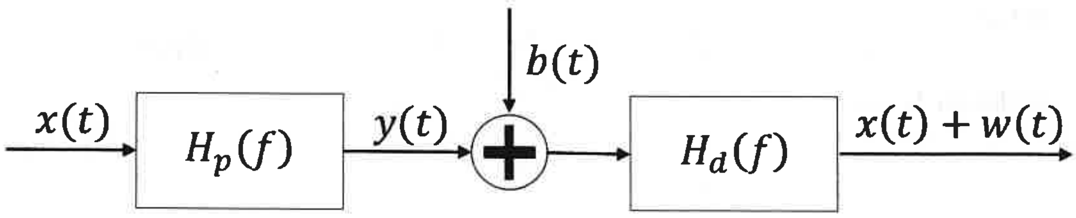



Figure 1: Système de préaccentuation/désaccentuation.

1. Déterminer la puissance du signal $y(t)$ notée $P_y$ en fonction de $H_p(f)$ et de $s_x(f)$.

2. Quelle relation doit-il y avoir entre $H_p(f)$ et $H_d(f)$ pour que la sortie du système s'écrive $s(t) = x(t) + w(t)$ avec $w(t) = b(t) * h_d(t)$, où $*$ désigne le produit de convolution. On supposera que cette relation est vérifiée dans la suite de cet exercice.

3. On admet que le filtre $H_d(f)$ minimisant la puissance de $w(t)$ pour une puissance $P_y = P_0$ donnée est tel que

$$|H_d(f)|^2 = \sqrt{\lambda \frac{s_x(f)}{s_b(f)}}$$

avec $\lambda > 0$. En utilisant la relation $P_y = P_0$, exprimer $\sqrt{\lambda}$ en fonction de $P_0$, $s_x(f)$ et $s_b(f)$.

4. En déduire le module carré de la transmittance du filtre de désaccentuation $|H_d(f)|^2$ en fonction de $P_0$, $s_x(f)$ et $s_b(f)$.

### Exercice 3 (4 points)

On considère un filtre non-linéaire qui transforme un signal aléatoire $X(t)$ en un signal aléatoire $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

On supposera dans cet exercice que $X(t)$ est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $r_X(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T\right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\Sigma$ est la matrice de covariance du couple $(U, V)$ définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de $\Sigma$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que l'autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$ et d'une constante additive notée $C$.

   *Rappel : on pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours)*

   $$E\left[X^2(t)X^2(t-\tau)\right] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation suivante

   $$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] R_X^n(0)$$

   En déduire la valeur de $C$.

## Transformée de Fourier

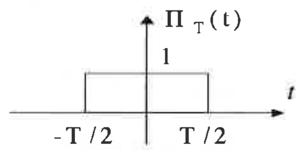
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

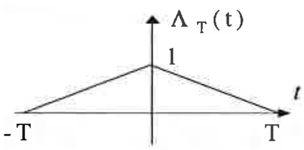
| | **T.F.** | |
|---|---|---|
| $x(t)$ réelle paire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ réelle paire |
| $x(t)$ réelle impaire | $\rightleftharpoons$ | $X(f)$ imaginaire pure impaire |
| $x(t)$ réel | $\rightleftharpoons$ | $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$ |
| $ax(t) + by(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $aX(f) + bY(f)$ |
| $x(t - t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f)e^{-i2\pi ft_0}$ |
| $x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f - f_0)$ |
| $x^*(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X^*(-f)$ |
| $x(t) \,.\, y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f) * Y(f)$ |
| $x(t) * y(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $X(f) \,.\, Y(f)$ |
| $x(at)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| $\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$ | $\rightleftharpoons$ | $(i2\pi f)^n X(f)$ |
| $(-i2\pi t)^n x(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$ |

| **Formule de Parseval** |
|---|
| $\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$ |
| $\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$ |

| **Série de Fourier** |
|---|
| $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$ |
| avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$ |

| | **T.F.** | |
|---|---|---|
| $1$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $1$ |
| $e^{+i2\pi f_0 t}$ | $\rightleftharpoons$ | $\delta(f - f_0)$ |
| $\delta(t - t_0)$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-i2\pi f t_0}$ |
| $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ |
| $\cos(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ |
| $\sin(2\pi f_0 t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert}$ | $\rightleftharpoons$ | $\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$ |
| $e^{-\pi t^2}$ | $\rightleftharpoons$ | $e^{-\pi f^2}$ |
| $\Pi_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$ |
| $\Lambda_T(t)$ | $\rightleftharpoons$ | $T \sin c^2(\pi T f)$ |
| $B \sin c(\pi B t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Pi_B(f)$ |
| $B \sin c^2(\pi B t)$ | $\rightleftharpoons$ | $\Lambda_B(f)$ |




**!!!!!! Attention !!!!!**

$\Pi_T(t)$ est de support égal à $T$.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$

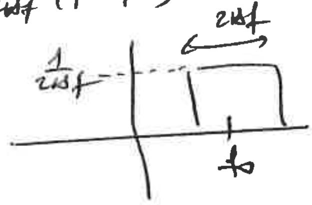
**Ex1** On a $E[X(t)] = E[e^{j\phi}\, e^{j2\pi f t}]$

$$= e^{j\phi} \int e^{j2\pi f t}\, p(f)\, df$$

donc $\boxed{E[X(t)] = e^{j\phi}\; TF^{-1}[\,p(f)\,]}$

En général, $TF^{-1}[p(f)]$ dépend de $t$ (sauf cas exceptionnel $p(f) = (\text{constante}) \times \delta(f)$)
donc $X(t)$ est non stationnaire.

- si $f$ uniforme sur $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ alors $p(f) = \frac{1}{2\Delta f}\, \Pi_{2\Delta f}(f - f_0)$




Donc $TF^{-1}[p(f)] = \frac{1}{2\Delta f}\, 2\Delta f\, \text{sinc}(2\pi \Delta f t)\, e^{j2\pi f_0 t}$

d'où $\boxed{E[X(t)] = e^{j\phi} \cdot \text{sinc}(2\pi \Delta f t)\, e^{j2\pi f_0 t}}$

- si $p(f) = \exp[-\pi (f - f_0)^2]$ alors

$$TF^{-1}[p(f)] = e^{j2\pi f_0 t}\; \underbrace{TF^{-1}[e^{-\pi f^2}]}_{e^{-\pi t^2}}$$

donc $\boxed{E[X(t)] = e^{j\phi}\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-\pi t^2}}$

On remarquera que dans les deux cas ci-dessus, $X(t)$ est non-stationnaire

Fonction d'autocorrélation

$$E[X(t)X^*(t-\tau)] = E[e^{j\phi}\, e^{j2\pi f t}\, e^{-j\phi}\, e^{-j2\pi f(t-\tau)}]$$

$$= E[\, e^{j2\pi f \tau}\,]$$

$$= \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} e^{j2\pi f \tau}\, \underbrace{\frac{1}{2\,\Delta f}}_{p(f)}\, df$$

donc

$$E[X(t)X^*(t-\tau)] = \frac{1}{2\Delta f}\, \frac{1}{j2\pi\tau} \Big[ e^{j2\pi f \tau} \Big]_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f}$$

$$= \frac{1}{2\Delta f}\, \frac{1}{j2\pi\tau}\, e^{j2\pi f_0 \tau}\, \underbrace{\Big[ e^{j2\pi \Delta f \tau} - e^{-j2\pi \Delta f \tau} \Big]}_{2j\, \sin(2\pi \Delta f \tau)}$$

Soit $\boxed{R_X(\tau) = e^{j2\pi f_0 \tau}\, \text{sinc}(2\pi \Delta f \tau)}$

On en déduit $s_x(f) = \delta(f - f_0) * \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f)$

d'où $\boxed{s_x(f) = \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0)}$

Ex2 1) $P_y = \int s_y(f)\, df$

D'après Wiener lee $s_y(f) = s_x(f)\, |H_p(f)|^2$ donc

$$\boxed{P_y = \int s_x(f)\, |H_p(f)|^2\, df}$$

0,5

2) la sortie du système s'écrit

$s(t) = \left(y(t) + b(t)\right) * h_d(t)$

$= b(t) * h_d(t) + x(t) * h_p(t) * h_d(t)$

Pour avoir $s(t) = w(t) + x(t)$, il suffit d'avoir

1 $\boxed{h_p(t) * h_d(t) = \delta(t)}$ ou $\boxed{H_p(f)\, H_d(f) = 1}$ (1)

3) Puisque $P_y = P_0$, on a

$$P_0 = \int s_x(f)\, |H_p(f)|^2\, df \underset{\text{d'après (1)}}{=} \int \frac{s_x(f)}{|H_d(f)|^2}\, df$$

On en déduit $$P_0 = \int \frac{s_x(f) \sqrt{s_b(f)}}{\sqrt{\lambda} \sqrt{s_x(f)}}\, df$$

1 Soit $\boxed{\sqrt{\lambda} = \frac{1}{P_0} \int \sqrt{s_x(f)\, s_b(f)}\, df}$

4) On en conclut

$$|H_d(f)|^2 = \sqrt{\lambda} \frac{\sqrt{s_x(f)}}{\sqrt{s_b(f)}} = \boxed{\frac{1}{P_0} \sqrt{\frac{s_x(f)}{s_b(f)}} \int \sqrt{s_x(f)\, s_b(f)}\, df}$$

0,5

(3)

Exo 3

$$Y(t) = X(t) - k\,X^3(t)$$

1) $\mathrm{Var}\,U = \underbrace{E[X^2(t)]}_{R_x(0)} - \underbrace{E^2[X(t)]}_{0} = \boxed{R_x(0)}$

$\mathrm{Var}\,V = E[X^2(t-\tau)] - \underbrace{E^2[X(t-\tau)]}_{0} = \boxed{R_x(0)}$ 1pt

$\mathrm{Cov}(U,V) = E[X(t)\,X(t-\tau)] - \underbrace{E[X(t)]}_{0}\underbrace{E[X(t-\tau)]}_{0} = \boxed{R_x(\tau)}$

2) $$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\big[(1-3kX^2(t))(1-3kX^2(t-\tau))\big]$$

$$= 1 - 3k\underbrace{E[X^2(t)]}_{R_x(0)} - 3k\underbrace{E[X^2(t-\tau)]}_{R_x(0)} + 9k^2 R_{x^2}(\tau)$$ 1pt

$$= 1 - 6k\,R_x(0) + 9k^2 R_{x^2}(\tau)$$

En utilisant la fonction d'autocorrélation du quadrateur, on en déduit 1pt

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \underbrace{1 - 6k R_x(0) + 9k^2 R_x^2(0)}_{[1-3kR_x(0)]^2} + 18k^2 R_x^2(\tau)$$

d'où

$$\boxed{R_y(\tau) = [1-3kR_x(0)]^2\,R_x(\tau) + 6k^2 R_x^3(\tau) + C}$$

3) On a $C = R_y(0) - [1-3kR_x(0)]^2 R_x(0) - 6k^2 R_x^3(0)$

avec $R_y(0) = E[Y^2(t)] = E[X^2(t) - 2kX^4(t) + k^2X^6(t)]$

$$= R_x(0) - 2k\,m_4 + k^2 m_6$$

$$= R_x(0) - 6k\,R_x^2(0) + 15k^2 R_x^3(0)$$

rappel

donc $C = R_x(0) - 6kR_x^2(0) + 15k^2R_x^3(0) - \big(R_x(0) - 6kR_x^2(0) + 9k^2R_x^3(0)\big) - 6k^2R_x^3(0)$

1pt

Soit $\boxed{C = 0}$