EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 11 janvier 2021 (10h00-11h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Multiplexage de signaux

On considère le signal $\mathbf{x}(t)$ défini comme suit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\cos(2\pi f_0 t) + \mathbf{B}\sin(2\pi f_0 t),$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires réelles stationnaires au sens large (i.e., stationnaires à l'ordre 1 et 2). On va s'intéresser aux conditions nécessaires et suffisantes sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ garantissant la stationnarité au sens large du signal $\mathbf{x}(t)$.

1. **Stationnarité au premier ordre :**

   (a) Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)]$.
   On a
   $$\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)] = \mathbb{E}[\mathbf{A}]\cos(2\pi f_0 t) + \mathbb{E}[\mathbf{B}]\sin(2\pi f_0 t).$$

   (b) En déduire que pour avoir $\mathbf{x}(t)$ stationnaire à l'ordre 1, nécessairement, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires centrées (i.e., de moyennes nulles). On considérera cette propriété vraie par la suite.
   Pour que $\mathbf{x}(t)$ soit stationnaire à l'ordre 1, il faut que $\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)]$ soit une quantité indépendante de t, ce qui nécessite d'avoir $\mathbb{E}[\mathbf{A}] = \mathbb{E}[\mathbf{B}] = 0$.

2. **Stationnarité au second ordre :**

   (a) Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{x}^2(0)]$ et $\mathbb{E}\left[\mathbf{x}^2\left(\frac{1}{4f_0}\right)\right]$ en fonction des moments d'ordre 2 de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Que devraient vérifier ces deux quantités si on suppose le signal stationnaire à l'ordre 2? En déduire la condition nécessaire sur les variances de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour avoir la stationnarité à l'ordre 2.
   On a $\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}$ et $\mathbf{x}\left(\frac{1}{4f_0}\right) = \mathbf{B}$, donc
   $$\mathbb{E}[\mathbf{x}^2(0)] = \mathbb{E}[\mathbf{A}^2] \text{ et } \mathbb{E}\left[\mathbf{x}^2\left(\frac{1}{4f_0}\right)\right] = \mathbb{E}[\mathbf{B}^2].$$
   Si le signal $\mathbf{x}(t)$ est stationnaire à l'ordre 2, on a $\mathbb{E}[\mathbf{x}^2(0)] = \mathbb{E}\left[\mathbf{x}^2\left(\frac{1}{4f_0}\right)\right] = R_{\mathbf{x}}(0)$, où $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal $\mathbf{x}(t)$, d'où la condition nécessaire de stationnarité à l'ordre 2
   $$\mathbb{E}[\mathbf{A}^2] = \mathbb{E}[\mathbf{B}^2].$$

   (b) Calculer alors $\mathbb{E}(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau))$. En déduire la condition supplémentaire à vérifier par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour avoir $\mathbf{x}(t)$ stationnaire à l'ordre 2. On utilisera les relations suivantes:
   $$\begin{aligned}
   \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
   \sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\
   \sin a \cos b &= \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\
   \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]
   \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal $\mathbf{x}(t)$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)] =& E\left\{[\mathbf{A}\cos(2\pi f_0 t)+\mathbf{B}\sin(2\pi f_0 t)][\mathbf{A}\cos(2\pi f_0(t-\tau))+\mathbf{B}\sin(2\pi f_0(t-\tau))]\right\}\\ =& E\left[\mathbf{A}^2\right]\cos(2\pi f_0\tau)+E[\mathbf{AB}]\sin(4\pi f_0 t-2\pi f_0\tau)\end{aligned}$$

Pour que $\mathbf{x}(t)$ soit stationnaire à l'ordre 2, il faut donc $E[\mathbf{AB}]=0$.

3. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{x}(t)$ est stationnaire au sens large si et seulement si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux variables aléatoires centrées, de même variance et décorrélées. Donner alors les expressions de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance associées à $\mathbf{x}(t)$.
   Pour que $\mathbf{x}(t)$ soit stationnaire au sens large, d'après ce qui précède, il faut $\mathbb{E}[\mathbf{A}]=\mathbb{E}[\mathbf{B}]=0$ (condition nécessaire et suffisante de stationnarité à l'ordre 1) et d'autre part $\mathbb{E}[\mathbf{A}^2]=\mathbb{E}[\mathbf{B}^2]$ et $E[\mathbf{AB}]=0$ (condition nécessaire et suffisante de stationnarité à l'ordre 2). On a alors comme fonction d'autocorrélation:

$$R_{\mathbf{x}}(\tau)=\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)]=E\left[\mathbf{A}^2\right]\cos(2\pi f_0\tau).$$

   La densité spectrale de puissance de $\mathbf{x}(t)$ est la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, soit

$$s_{\mathbf{x}}(f)=\frac{\mathbb{E}\left[\mathbf{A}^2\right]}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)].$$

Exercice 2 : Cascade d'un filtre non-linéaire et d'un filtre linéaire

Pour estimer la puissance moyenne d'un signal aléatoire à valeurs réelles $\mathbf{x}(t)$, Gaussien centré et d'autocorrélation $R_{\mathbf{x}}(\tau)$, on utilise un fitrage en cascade composé d'un quadrateur suivi d'un filtrage linéaire par un filtre passe-bas $h(t)$. On suppose que le signal aléatoire $\mathbf{x}(t)$ est stationnaire au second ordre de densité spectrale de puissance

$$s_{\mathbf{x}}(f)=\frac{N_0}{2}\Pi_{2B}(f).$$

1. **Etude du quadrateur**
   Soit $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}^2(t)$ le processus en sortie du premier étage du dispositif.
   (a) Calculer de manière directe l'expression $m_y=\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)]$ en fonction de la fonction d'autocorrélation de $\mathbf{x}(t)$. Le signal $\mathbf{y}(t)$ est-il stationnaire à l'ordre 1 ?
   On a $\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)]=\mathbb{E}[\mathbf{x}^2(t)]=R_x(0)$ qui est une quantité indépendante de t donc le signal $\mathbf{y}(t)$ est stationnaire à l'ordre 1.
   (b) En appliquant le théorème de Price, montrer que la fonction d'autocorrélation du signal $\mathbf{y}(t)$ vérifie

$$R_{\mathbf{y}}(\tau)=2R_{\mathbf{x}}^2(\tau)+K,$$

   où K une constante.
   D'après le théorème de Price

$$\frac{\partial R_{\mathbf{y}}(\tau)}{\partial R_{\mathbf{x}}(\tau)}=\mathbb{E}[\left[\frac{d\mathbf{y}(t)}{d\mathbf{x}(t)}\frac{d\mathbf{y}(t-\tau)}{d\mathbf{x}(t-\tau)}\right]=4\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)]=4R_{\mathbf{x}}(\tau).$$

   Par intégration, on obtient

$$R_{\mathbf{y}}(\tau)=2R_{\mathbf{x}}^2(\tau)+K.$$

(c) En utilisant, l'expression des moments d'une loi gaussienne centrée X

$$\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right) = 0,\ \mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = [(2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1]\sigma^{2n},$$

déterminer la constante K. En déduire que

$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = 2R_{\mathbf{x}}^2(\tau) + m_y^2.$$

En faisant $\tau = 0$, on obtient

$$K = R_{\mathbf{y}}(0) - 2R_{\mathbf{x}}^2(0).$$

Mais $R_{\mathbf{y}}(0) = \mathbb{E}[\mathbf{y}^2(t)] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^4(t)]$. En utilisant le rappel, on a $R_{\mathbf{y}}(0) = 3R_{\mathbf{x}}^2(0)$, d'où $K = R_{\mathbf{x}}^2(0)$. On en déduit

$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = 2R_{\mathbf{x}}^2(\tau) + R_{\mathbf{x}}^2(0) = 2R_{\mathbf{x}}^2(\tau) + m_y^2.$$

(d) Conclure sur la stationnarité à l'ordre 2 du signal $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^2(t)$.
Comme $\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)]$ et $\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t-\tau)]$ sont deux quantités indépendantes de t, le signal $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^2(t)$ est stationnaire à l'ordre 2.

2. **Estimateur par filtrage linéaire**
Le signal en sortie de quadrateur est ensuite filtré par un filtre linéaire invariant par décalage de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de gain fréquentiel (transmittance) $H(f) = \text{TF}[h(t)]$. On note $\mathbf{z}(t) = h(t) * \mathbf{y}(t)$.

(a) Que pouvez vous dire de la stationnarité du signal $\mathbf{z}(t)$?
Nous avons vu en cours que la sortie d'un filtre linéaire est stationnaire si l'entrée est un signal stationnaire. Comme $\mathbf{y}(t)$ est stationnaire, $\mathbf{z}(t)$ est aussi stationnaire.

(b) Quelle condition doit vérifier le filtre $h(t)$ pour garantir $m_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}(t)] = \sigma_x^2$? On souhaite utiliser le filtre de gain fréquentiel

$$H(f) = \Pi_{2b}(f), b < B.$$

Ce filtre noté $\mathcal{F}$ vérifie-t-il la condition précédente? Justifier.
D'après la relationd e Wiener-Lee, on a

$$m_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}(t)] = H(0)\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)] = H(0)\mathbb{E}[\mathbf{x}^2(t)] = H(0)\sigma_x^2.$$

Pour avoir $m_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}(t)] = \sigma_x^2$, il suffit donc que le filtre vérifie

$$H(0) = \int_{\mathbb{R}} h(t)dt = 1.$$

Le filtre $\mathcal{F}$ de transmittance $H(f) = \Pi_{2b}(f)$ vérifie la condition $H(0) = 1$.

(c) En utilisant le filtre précédent, la sortie du filtre peut-être vue comme un estimateur aléatoire instantané non biaisé de σ_x^2. Quelle est la valeur de $m_z = \sigma_x^2$ en fonction de N_0 et B ?
On a

$$m_z = \sigma_x^2 = \mathbb{E}[\mathbf{x}(0)] = N_0 B.$$

(d) Pour étudier le comportement de cet estimateur et l'influence du paramètre b du filtre, on va étudier sa fluctuation déterminée par la variance de $\mathbf{z}(t)$. On doit donc étudier

$$\sigma_z^2 = \mathbb{E}([\mathbf{z}(t) - m_z]^2).$$

Comme $\mathbf{y}(t)$ est non centré, $\mathbf{z}(t)$ ne l'est pas également. Pour calculer cette quantité facilement, on peut montrer que l'étude des relations entrées-sorties peut se ramener à l'étude des propriétés d'autocorrélation des processus centrés $\tilde{y}(t) = \mathbf{y}(t) - m_y$ et $\tilde{z}(t) = \mathbf{z}(t) - m_z = h(t) * \tilde{y}(t)$. On admettra qu'on a

$$\sigma_z^2 = \sigma_{\tilde{z}}^2 = R_{\tilde{z}}(0).$$

Montrer que $R_{\tilde{y}}(\tau) = R_y(\tau) - m_y^2$ et donner l'expression de $R_{\tilde{y}}(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$. En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance associée $s_{\tilde{y}}(f) = \text{TF}[R_{\tilde{y}}(\tau)]$ en fonction de B et N_0.

On a

$$\begin{aligned} R_{\tilde{y}}(\tau) =& \mathbb{E}[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t-\tau)] \\ =& \mathbb{E}[(\mathbf{y}(t) - m_y)(\mathbf{y}(t-\tau) - m_y)] \\ =& R_y(\tau) - \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)]m_y - m_y\mathbb{E}[\mathbf{y}(t-\tau)] + m_y^2 \end{aligned}$$

En utilisant la stationnarité de $\mathbf{y}(t)$, on obtient $\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)] = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t-\tau)] = m_y$, d'où

$$R_{\tilde{y}}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) - m_y^2.$$

On en déduit

$$R_{\tilde{y}}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_{\mathbf{x}}^2(0) - R_{\mathbf{x}}^2(0) = 2R_{\mathbf{x}}^2(\tau).$$

Mais

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \text{TF}^{-1}[s_{\mathbf{x}}(f)] = \frac{N_0}{2}\text{TF}^{-1}[\Pi_{2B}(f)] = (N_0 B)\text{sinc}(2\pi B\tau).$$

Donc

$$R_{\tilde{y}}(\tau) = 2R_{\mathbf{x}}^2(\tau) = 2(N_0B)^2\text{sinc}^2(2\pi B\tau) = (N_0^2B) \times 2B\text{sinc}^2(2\pi B\tau)$$

et

$$s_{\tilde{y}}(f) = (N_0^2 B)\Lambda_{2B}(f).$$

(e) Donner l'expression de

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 = R_{\tilde{z}}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_{\tilde{z}}(f)df$$

en fonction de B, b et N_0. Si $b << B$, déduire que

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 \approx 2BbN_0^2.$$

L'égalité de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_{\tilde{z}}(f) = s_{\tilde{y}}(f)|H(f)|^2,$$

d'où

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 = \int_{\mathbb{R}} s_{\tilde{z}}(f)df = \int_{\mathbb{R}} s_{\tilde{y}}(f)|H(f)|^2 df = (N_0^2B)\int_{-b}^{b} \Lambda_{2B}(f)df.$$

Pour b "petit", on a $\int_{-b}^{b} \Lambda_{2B}(f)df \approx 2b$, d'où $\sigma_{\tilde{z}}^2 \approx 2BbN_0^2$.

(f) En déduire l'écart relatif de fluctuation donné par σ_z/m_z en fonction du ratio b/B. Conclure.
L'écart relatif de fluctuation est

$$\frac{\sigma_z}{m_z} = \frac{\sigma_{\tilde{z}}}{m_z} \approx \frac{\sqrt{2BbN_0^2}}{N_0 B} = \sqrt{\frac{2b}{B}}$$

qui est faible pour $b << B$. On en déduit que la sortie du filtre $\mathcal{F}$ est un bon estimateur de $m_z = \sigma_x^2$.