EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 10 janvier 2022 (10h00-11h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (2 points)

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \cos(3\pi t).$$

Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $x(t)$.
On rappelle la formule trigonométrique suivante : $\cos(a)+\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.
Le signal $x(t) = \cos(3\pi t) = \cos\left([2\pi\left(\frac{3}{2}\right)t\right]$ est un signal périodique de période $T_0 = \frac{2}{3}$. Sa fonction d'autocorrélation est donc définie par

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(3\pi t)\cos(3\pi(t-\tau))\,dt.$$

En utilisant la formule trigonométrique, on a

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos(3\pi\tau)+\cos(6\pi t-3\pi\tau)\right]dt = \frac{1}{2}\cos(3\pi\tau).$$

La densité spectrale de puissance de $x(t)$ est donc

$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \frac{1}{2}\text{TF}\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{3}{2}\right)\tau\right]\right\} = \frac{1}{4}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

avec $f_0 = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 (5 points)

On considère un processus aléatoire réel stationnaire $X(t)$ de moyenne $m = E[X(t)]$, de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$ et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. Pour $T > 0$, on construit le signal aléatoire $Y(t)$ comme suit

$$Y(t) = \int_t^{t+T} X(u)du - \int_{t-T}^{t} X(u)du.$$

1) (3pts) Montrer que l'opération liant $X(t)$ et $Y(t)$ est une opération de filtrage linéaire (invariant dans le temps) et que la transmittance s'écrit $H(f) = 2jT\text{sinc}(\pi f T)\sin(\pi f T)$. Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ associée à $H(f)$.
Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi f t)$ et de vérifier qu'elle s'écrit $\exp(j2\pi f t)H(f)$, où $H(f)$ est une quantité indépendante de t qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi f t)$ est

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_t^{t+T} \exp(j2\pi f u)du - \int_{t-T}^{t} \exp(j2\pi f u)du \\ &= \frac{\exp(j2\pi f(t+T)) - \exp(j2\pi f t)}{j2\pi f} - \frac{\exp(j2\pi f t) - \exp(j2\pi f(t-T))}{j2\pi f} \\ &= \exp(j2\pi f t)H(f) \end{aligned}$$

avec

$$H(f)=\frac{\exp(j2\pi fT)-1}{j2\pi f}-\frac{1-\exp(-j2\pi fT)}{j2\pi f}$$

Donc $Y(t)$ est obtenu par filtrage de $X(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f)$ définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est $h(t)=\mathrm{TF}^{-1}[H(f)]$. Pour déterminer cette transformée de Fourier inverse, on peut décomposer $H(f)$ comme suit

$$\begin{aligned}H(f)=&\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{j\pi fT}\left(e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}\right)-e^{-j\pi fT}\left(e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}\right)\right]\\&=2jT\mathrm{sinc}(\pi fT)\sin(\pi fT)\\&=T\mathrm{sinc}(\pi fT)[\exp(j\pi fT)-\exp(-j\pi fT)]\end{aligned}$$

On en déduit

$$h(t)=2j\Pi_T(t)*\left[\frac{1}{2j}\left(\delta(t+T/2)-\delta(t-T/2)\right)\right]=\Pi_T\left(t+\frac{T}{2}\right)-\Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right).$$

2) (1pt) Déterminer la moyenne du signal $Y(t)$ et la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.
Les relations de Wiener-Lee permettent d'obtenir

$$E[Y(t)]=E[X(t)]H(0)=0.$$

et

$$s_Y(f)=s_X(f)|H(f)|^2=4T^2s_X(f)\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\sin^2(\pi fT).$$

3) (1pt) Expliquer l'utilité pratique du filtre liant $X(t)$ et $Y(t)$.
Le filtre soustrait la moyenne du signal $X(t)$ après l'instant t à la moyenne du signal $X(t)$ avant l'instant t. Si ces deux moyennes sont proches, on a $Y(t)$ proche de 0. Si ces moyennes sont très différentes, $Y(t)$ aura une valeur importante. Ce filtre peut donc être utilisé pour détecter des changements de moyenne dans le signal $X(t)$.

Exercice 3 (4 points)

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à "écrétage "

$$g(x)=\frac{1}{2K}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_d}\right)\quad\text{avec}\quad\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du.$$

On l'applique à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t)=g\left[X(t)\right].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U,V)=(X(t),X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\mathbf{\Sigma}}(u,v)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det\mathbf{\Sigma}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u,v)^T\right]$$

où $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U,V) définie par

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix}\mathrm{var}(U) & \mathrm{cov}(U,V)\\ \mathrm{cov}(U,V) & \mathrm{var}(V)\end{pmatrix}$$

1) (1pt) Exprimer les éléments de $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$.
Cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) =& E[Y(t)Y^*(t-\tau)] \\ =& E\left\{g[X(t)]g[X(t-\tau)]\right\} \\ =& \int\int g(u)g(v)f_{\mathbf{\Sigma}}(u,v)dudv. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal $Y(t)$ ne dépend donc que des éléments de $\mathbf{\Sigma}$, c'est-à-dire de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.
2) (2pts) On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$, on a

$$E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t)+X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2}\right]\right\} = \frac{\sigma_d^2}{\sqrt{\left(\sigma_d^2+R_X(0)\right)^2 - R_X^2(\tau)}}$$

et on rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \arcsin\left(\frac{u}{|a|}\right), \; a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $g'(x) = \frac{1}{K\sigma_d\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right)$. En déduire $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près notée C qu'on supposera nulle.
La dérivée de g se calcule facilement comme suit (dérivée d'une fonction composée)

$$g'(x) = \frac{1}{2K} \times \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_d} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right) = \frac{1}{K\sigma_d\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right).$$

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} =& E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right] \\ =& \frac{1}{2\pi K^2\sigma_d^2} E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t)}{2\sigma_d^2}\right] \exp\left[-\frac{X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2}\right]\right\} \\ =& \frac{1}{2\pi K^2\sigma_d^2} E\left\{\exp\left[-\frac{X^2(t)+X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le rappel, on obtient

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = \frac{1}{2\pi K^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\sigma_d^2+R_X(0)\right)^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin}\left(\frac{R_X(\tau)}{\sigma_d^2+R_X(0)}\right) + C.$$

On admettait dans l'examen que $C=0$. Pour le démontrer, on peut faire un passage à la limite quand τ tend vers $+\infty$. On a alors

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau\to\infty} E[Y(t)Y(t-\tau)] = E^2[Y(t)].$$

On a donc

$$C = \lim_{\tau \to \infty} [R_Y(\tau) - R_Y^2(\tau)] = E^2[Y(t)].$$

Comme la fonction g est impaire, on a

$$E\left\{g[X(t)]\right\} = \int g(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = 0.$$

d'où $C = 0$.

3) (1pt) Montrer que la fonction autocorrélation normalisée du signal $Y(t)$ notée $\rho_Y(\tau)$ vérifie

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\arcsin\left(\frac{\rho_X(\tau)}{1+\alpha}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$$

avec $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{R_X(0)}$ et $\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$.

On a

$$R_y(0) = \frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin}\left(\frac{R_X(0)}{\sigma_d^2 + R_X(0)}\right).$$

Donc

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi K^2}\text{Arcsin}\left(\frac{R_X(\tau)}{\sigma_d^2 + R_X(0)}\right)}{\frac{1}{2\pi K^2}\text{Arcsin}\left(\frac{R_X(0)}{\sigma_d^2 + R_X(0)}\right)} = \frac{\arcsin\left(\frac{\rho_X(\tau)}{1+\alpha}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$$

avec $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{R_X(0)}$ et $\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$.

Remarque : ce résultat est issu l'article de R. F. Baum intitulé "The Correlation Function of Smoothly Limited Gaussian Noise" publié dans la revue IRE Transactions on Information Theory en septembre 1957 (vol. 3, no. 3).

Transformée de Fourier

$$X(f)=\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t)=\int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

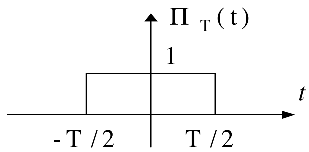
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\,.\,y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\,.\,Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

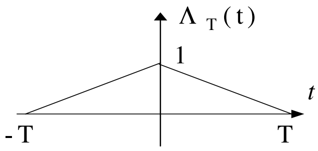
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0t} \rightleftharpoons X(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
avec $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf}=T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\,\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t\neq 0 \\ +\infty \text{ si } t=0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}}\delta(t)\,dt=1 \\
\delta(t-t_0)\,f(t) &= \delta(t-t_0)\,f(t_0) \\
\delta(t-t_0)*f(t) &= f(t-t_0)
\end{aligned}$$