Examen Traitement du Signal - 1SN

Lundi 11 janvier 2021 (10h00-11h00)

Partiel sans document
(Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Durée : 1 heure

1 Exercice 1 : Stationnarité de deux signaux modulés en amplitude

Soit $X(t)$ un processus stochastique réel stationnaire aux premier et second ordres (mais non nécessairement centré). On notera $R_X(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation et $m_X = E[X(t)]$ sa moyenne. On considère maintenant les deux processus stochastiques suivants :

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$
$$Z(t) = X(t)\cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi)$$

où f_0 et Δf sont des constantes et φ une variable aléatoire indépendante de $X(t)$ et uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

On rappelle les relations suivantes :

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos(\tfrac{a+b}{2})\cos(\tfrac{a-b}{2})$$

Montrer que :

1. $Y(t)$ et $Z(t)$ sont deux processus stochastiques stationnaires au second ordre.

   Par calcul direct, on a

   $$\mathbb{E}(Y(t)) = \mathbb{E}(X(t))\mathbb{E}_{\varphi}(\cos(2\pi f_0 t + \varphi)) = 0$$

   Donc $Y(t)$ est centré et par conséquence stationnaire à l'ordre 1.

   En utilisant l'indépendance de $X(t)$ et ϕ, on a

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y(t)Y(t-\tau)) &= \mathbb{E}(X(t)X(t-\tau))\mathbb{E}(\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \varphi)) \\ &= R_X(\tau) \times \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\end{aligned}$$

   $Y(t)$ est donc également stationnaire à l'ordre 2.

En posant $f_1 = f_0 + \Delta f$, on procède de même pour le processus $Z(t)$. On trouve

$$\mathbb{E}(Z(t)) = 0$$

et

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) \times \frac{1}{2} \cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)\tau\right)$$

Donc $Z(t)$ est stationnaire aux ordres 1 et 2.

2. Le processus défini par $H(t) = Y(t) + Z(t)$ est-il un processus stationnaire au second ordre ? Si non, à quelle condition peut-il le devenir ?

   Pour la stationnarité au premier ordre, on a par linéarité de l'opérateur espérance :

   $$\mathbb{E}(H(t)) = \mathbb{E}(Y(t)) + \mathbb{E}(Z(t)) = 0.$$

   Donc $H(t)$ est bien un processus stationnaire à l'ordre 1 car centré.

   Ensuite, il convient d'évaluer

   $$\mathbb{E}(H(t)H(t-\tau)) = \mathbb{E}(Y(t)Y(t-\tau)) + \mathbb{E}(Z(t)Z(t-\tau)) + \mathbb{E}(Y(t)Z(t-\tau)) + \mathbb{E}(Z(t)Y(t-\tau))$$

   ce qui donne

   $$\mathbb{E}(H(t)H(t-\tau)) = R_Y(\tau) + R_Z(\tau) + \mathbb{E}(Y(t)Z(t-\tau)) + \mathbb{E}(Z(t)Y(t-\tau)).$$

   Les deux derniers termes sont des termes d'intercorrélations. La stationnarité dépend de l'expression de ces deux termes dont la somme ne doit pas dépendre du temps.

   Le premier premier terme est donné par

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y(t)Z(t-\tau) &= R_X(\tau)\mathbb{E}(\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)(t-\tau) + \varphi\right)) \\ &= R_X(\tau) \times \frac{1}{2}\cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)\tau - 2\pi\Delta f t\right)\end{aligned}$$

   Le second est donné par

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z(t)Y(t-\tau) &= R_X(\tau)\mathbb{E}(\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)(t-\tau) + \varphi\right)) \\ &= R_X(\tau) \times \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau + 2\pi\Delta f t\right)\end{aligned}$$

   On a alors

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y(t)Z(t-\tau) + \mathbb{E}(Z(t)Y(t-\tau) &= \frac{R_X(\tau)}{2} \times \left(\cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)\tau - 2\pi\Delta f t\right) + \cos\left(2\pi f_0 \tau + 2\pi\Delta f t\right)\right) \\ &= R_X(\tau)\cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f/2)\tau\right)\cos\left(2\pi\Delta f(t + \tau/2)\right)\end{aligned}$$

   On a alors stationnarité si et seulement si $\Delta f = 0$.

2 Exercice 2 : Filtre dérivateur d'ordre n

2.1 Filtre dérivateur

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire au sens large (aux ordres 1 et 2) et

$$y(t) = x'(t).$$

On notera $m_x = \mathbb{E}(x(t))$ et $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x^*(t-\tau))$ la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

1. Montrer que

$$y(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = h(t) * x(t)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire invariant par décalage, appelé filtre dérivateur, de gain fréquentiel $H(f) = j2\pi f$.

Pour vérifier qu'une opération $y(t) = T[x(t)]$ est une opération de filtrage linéaire, on remplace $x(t)$ par $\exp(j2\pi ft)$ dans l'expression de $y(t)$. On obtient

$$y(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = j2\pi f \exp(j2\pi ft)$$

et donc $y(t) = \exp(j2\pi ft)H(f)$, ce qui définit une opération de filtrage linéaire avec un filtre de transmittance $H(f) = j2\pi f$.

2. Déterminer la moyenne de $y(t)$.

Par stationnarité à l'ordre 1 du processus entrant $x(t)$ ($\mathbb{E}(x(t) = m_x =$ constante)), on obtient

$$\mathbb{E}(y(t)) = H(0)m_x = 0$$

Le signal $y(t)$ est donc centré, stationnaire à l'ordre 1.

3. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance de $\mathbf{y}(t)$ en fonction de celle de $\mathbf{x}(t)$, notée $S_x(f) = \mathrm{TF}(R_x(\tau))$.

Par stationnarité à l'ordre 2 de $x(t)$, $h(t)$ étant un filtre linéaire invariant par décalage, le signal $y(t)$ est également stationnaire à l'ordre 2 et la relation de Wiener-Lee exprimée dans le domaine fréquentiel nous donne

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

i.e.,

$$S_y(f) = (2\pi f)^2 S_x(f).$$

4. En remarquant que pour le filtre $h(t)$, on a

$$H^*(f) = TF(h^*(-t)) = -H(f),$$

en déduire par transformation de Fourier inverse (voir tables), l'expression de l'autocorrélation de $\mathbf{y}(t)$ en fonction de celle de $\mathbf{x}(t)$.
On a

$$s_y(f) = (4\pi^2 f^2)s_x(f) = -(j2\pi f)^2 s_x(f).$$

Donc, d'après les tables, on a

$$R_y(\tau) = -R_x''(\tau),$$

où $R_x(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $\mathbf{x}(t)$ et $R_x''(\tau)$ sa dérivée seconde.

5. Rappeler le lien entre la fonction d'intercorrélation entrée-sortie $R_{\mathbf{yx}}(\tau) = \mathbb{E}(y(t)x^*(t-\tau))$ et les fonction $h(t)$ et $R_{\mathbf{x}}(\tau)$. En déduire une relation entre $R_{\mathbf{yx}}(\tau)$ et $S_x(f)$. En déduire que $R_{yx}(\tau) = R_x'(\tau)$.
Si on utilise la relation de Wiener-Lee, on a

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) = \mathrm{TF}^{-1}[S_x(f)H(f)] = \mathrm{TF}^{-1}[S_x(f)j2\pi f].$$

En utilisant les tables, on trouve le résultat

$$R_{yx}(\tau) = R_x'(\tau).$$

2.2 Filtre dérivateur d'ordre n

1. On souhaite généraliser ces résultats à la dérivation d'ordre n. Soit $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{d^{(n)}}{dt^n}x(t)$. Déduire de ce qui précède l'expression de la densité spectrale de puissance de $\tilde{\mathbf{y}}(t)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation de $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ est donnée par

$$R_{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{(2n)}}{d\tau^{2n}} R_{\mathbf{x}}(\tau).$$

L'opération qui transforme $\mathbf{x}(t)$ en $\mathbf{y}(t)$ est une opération de filtrage linéaire par un filtre de transmittance $H(f) = (j2\pi f)^n$. Donc d'après Wiener Lee

$$s_{\tilde{\mathbf{y}}}(f) = |(j2\pi f)^n|^2 s_x(f) = (4\pi^2 f^2)^n s_x(f).$$

Mais $(4\pi^2 f^2)^n = (-1)^n (j2\pi f)^{2n}$, d'où

$$R_{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{(2n)}}{d\tau^{2n}} R_{\mathbf{x}}(\tau).$$

2.3 Application : bruit blanc Gaussien à bande étroite

On considèrera ici que $\mathbf{x}(t)$ est un processus aléatoire réel Gaussien, centré et stationnaire au sens large de densité spectrale de puissance constante sur la bande $[-B, B]$. On parle alors de bruit blanc Gaussien à bande étroite. La densité spectrale de puissance de $\mathbf{x}(t)$ est donnée par

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2} \Pi_{2B}(f).$$

On notera l'autocorrélation correspondante par $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x(t-\tau))$.

1. Donner l'expression de $R_x(\tau) = \mathbb{E}(x(t)x(t-\tau))$.
   En utilisant les tables, on obtient

$$R_x(\tau) = \mathrm{TF}^{-1}[s_x(f)] = \frac{N_0}{2} \times (2B)\mathrm{sinc}(2\pi B\tau) = N_0 B\mathrm{sinc}(2\pi B\tau).$$

2. Exprimer la densité de probabilité de $x(t)$ et celle du couple $(x(t), x(t-\tau))$ (préciser les valeurs des paramètres des deux lois).
   Les lois de $\mathbf{x}(t)$ et de $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$ sont des lois normales à 1 et 2 dimensions. Mais

$$E[\mathbf{x}] = 0 \text{ et } \mathrm{var}[\mathbf{x}(t)] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^2(t)] = R_x(0) = N_0 B,$$

   donc $\mathbf{x}(t) \sim \mathcal{N}(0, N_0 B)$. De même, le couple $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$ est de moyenne $(0,0)$ et de matrice de covariance (vu en cours)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

3. On considère maintenant le processus $y(t) = x'(t)$. En considérant les résultats précédents, en déduire que $y(t)$ est un processus Gaussien dont on donnera la moyenne $\mathbb{E}(x'(t))$ et la variance $\mathbb{E}(|x'(t)|^2)$. Donner également les paramètres pour la densité conjointe de $(y(t), y(t-\tau))$.
   Comme $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$, le caractère Gaussien est préservé. On a par ailleurs $\mathbb{E}[y'(t)] = 0$ et $\mathbb{E}(|x'(t)|^2) = R_y(0) = -R''_x(0)$ Pour déterminer cette quantité, on a donc deux possibilités
   (a) on peut dériver deux fois l'expression de $R_x(\tau)$ déterminée précédemment et prendre la limite quand τ tend vers 0. On obtient

$$R'_x(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\sin(2\pi B\tau}{\tau}\right] = \frac{N_0}{2\pi}\left[2\pi B\frac{\cos(2\pi B\tau)}{\tau} - \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\tau^2}\right]$$

   et

$$R''_x(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\left[-4\pi^2 B^2\frac{\sin(2\pi B\tau)}{\tau} - 4\pi B\frac{\cos(2\pi B\tau)}{\tau^2} + 2\frac{\sin(2\pi B\tau)}{\tau^3}\right]$$

   Après un développement limité de cette quantité, on obtient

$$R''_x(0) = -\frac{4}{3}\pi^2 B^3 N_0,$$

   soit

$$\mathbb{E}(|x'(t)|^2) = \frac{4}{3}\pi^2 B^3 N_0.$$

   (b) on peut aussi utiliser la relation $R_y(0) = \int_{\mathbb{R}} S_y(f)df$, ce qui est plus simple

$$R_y(0) = \int_{\mathbb{R}} S_x(f) 4\pi^2 f^2 df = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2}\Pi_{2B}(f)\, 4\pi^2 f^2 df = \frac{4}{3}\pi^2 B^3 N_0.$$

3 Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f - n f_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f - f_0\right)$
$\delta\left(t - t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\, Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_0\right) + \delta\left(f + f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f - f_0\right) - \delta\left(f + f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B \sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B \sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right) * \Pi_T\left(t\right) = T\ \Lambda_T\left(t\right)$$