Partiel de Traitement du Signal.

Jeudi 13 décembre 2007

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1 : Variance d'Allan

Soit $x(t)$ un processus aléatoire stationnaire de moyenne $E[x(t)] = 0$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$.

1) On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)du$$

- Montrer que $y(t) = F_T[x(t)]$, où F_T est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle $h_T(t)$ et la transmittance $H_T(f)$ de ce filtre F_T.
- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$ notée $s_y(f)$ en fonction de $s_x(f)$. En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.
- Montrer que la puissance du signal $y(t)$ s'écrit

$$P_y = \int s_x(f) \sin c^2 (\pi f T)\, df \qquad \text{avec} \qquad \sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

2) On considère le signal constant par morceaux défini par

$$D(t) = \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{\sqrt{2}} \text{ si } t \in [kT, (k+1)T[$$

- Déterminer la puissance du signal $D(t)$ notée $P_D(T)$ en fonction de $R_y(0)$ et $R_y(T)$ puis sous une forme intégrale dépendant de $s_x(f)$.
- En utilisant la parité de la densité spectrale de puissance $s_x(f)$, en déduire

$$P_D(T) = 4\int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} s_x(f)df$$

La puissance $P_D(T)$ est appelée **variance d'Allan** du signal $x(t)$.

3) On rappelle les relations suivantes

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^2}du = \frac{\pi}{4}, \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^3}du = \log 2 \text{ et } \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4}du = \frac{\pi}{3}$$

Représenter graphiquement $\log P_D(T)$ en fonction de $\log T$ dans les cas suivants

- Bruit blanc : $s_x(f) = K_0$
- Bruit de Flicker : $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$
- Marche aléatoire de fréquence : $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$

Á votre avis, quel est l'intérêt de la variance d'Allan ?

Exercice 2 : Echantillonnage

1) Soit $x(t)$ un signal déterministe de puissance finie de transformée de Fourier $X(f)$ à support borné $\left[-\frac{B}{2}, +\frac{B}{2}\right]$. On multiplie ce signal par une fonction périodique de période T_e (et de fréquence $F_e = 1/T_e$) qui se décompose en série de Fourier sous la forme

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t F_e}$$

pour obtenir le signal

$$y(t) = x(t)g(t).$$

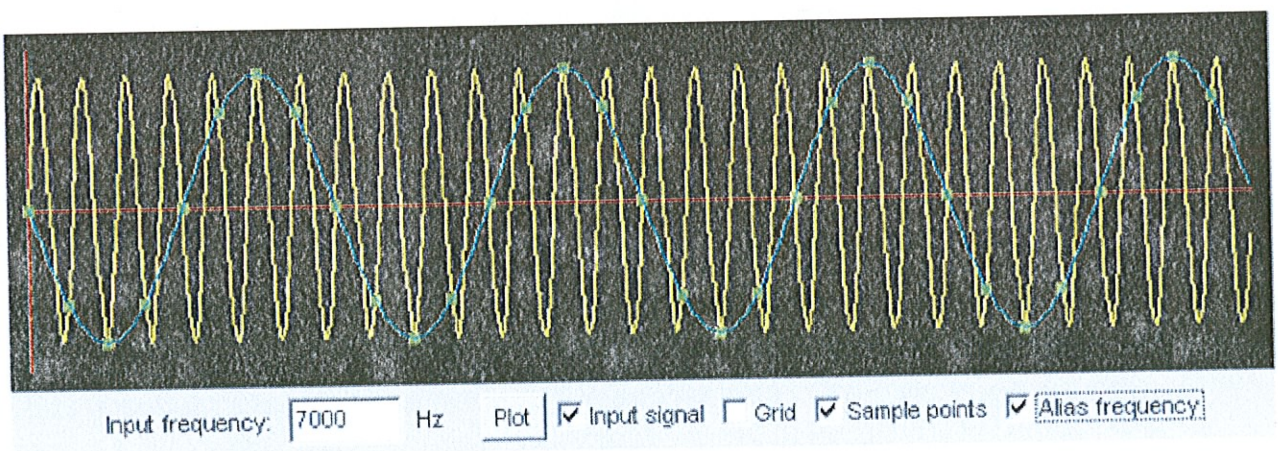
- Montrer que la transformée de Fourier de $y(t)$ notée $Y(f)$ est obtenue par "périodisation" de $X(f)$ à des constantes multiplicatives près. Représenter $Y(f)$ dans le cas où $x(t)$ est un signal passe bas idéal tel que $X(f) = \Pi_B(f)$.
- On filtre le signal $y(t)$ à l'aide d'un filtre de transmittance $H(f)$ et on obtient le signal $x_r(t)$. Quelle est la condition portant sur F_e et B permettant de restituer $x(t)$ à l'issue de ce filtrage ?

2) On suppose désormais que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = E\left[x(t)x^*(t-\tau)\right]$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal

$$z(t) = x(t)g(t+\phi)$$

où ϕ est une phase uniformément répartie sur l'intervalle $[0, T_e[$ indépendante du signal $x(t)$.

- Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $z(t)$ notées respectivement $R_z(\tau)$ et $s_z(f)$ en fonction de $R_x(\tau)$, des coefficients c_k et de F_e.
- Représenter $s_z(f)$ lorsque $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, où A et f_0 sont deux constantes et θ est une phase uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$
- Le signal $x(t)$ est représenté en jaune sur la figure ci-dessous tandis que les points en vert correspondent à la suite périodique d'instants contenus dans $g(t+\phi)$. On filtre le signal $z(t)$ à l'aide d'un filtre passe bas idéal et on obtient le signal en bleu représenté sur la figure ci-dessous. Pouvez vous expliquer ce résultat ?



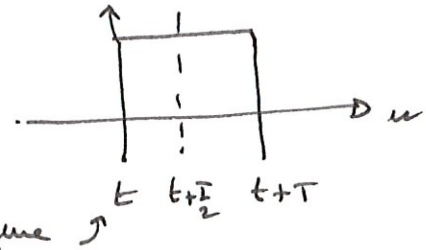
EXERCICE 1

1) Il existe plusieurs méthodes permettant de montrer que

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(u)\,du$$

est une opération de filtrage linéaire. Nous adoptons ici une méthode temporelle

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[t,t+T]}(u)\,x(u)\,du$$



où la fonction indicatrice est représentée sur la figure ↗

Avec les notations habituelles, on a

$$\mathbb{1}_{[t,t+T]}(u) = \Pi_T\left(u - \left(t + \frac{T}{2}\right)\right)$$

En utilisant la parité de $\Pi_T(\cdot)$, on obtient

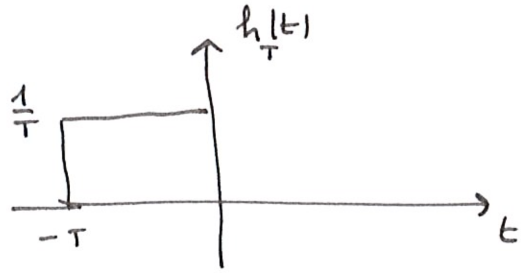
$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T\left(t + \frac{T}{2} - u\right) x(u)\,du$$

d'où en posant $h_T(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t-u)\,x(u)\,du$$

On a donc montré que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$ et de réponse impulsionnelle

$$\boxed{h_T(t) = \frac{1}{T}\,\Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right)}$$



La transmittance de ce filtre est

$$H_T(f) = \frac{1}{T}\, e^{j\pi f T}\, TF\left[\Pi_T(t)\right]$$

d'où

$$\boxed{H_T(f) = e^{j\pi f T}\,\mathrm{sinc}(\pi f T)}$$

2) D'après les relations de WIENER-LEE, on a

$$s_y(f) = s_x(f)\,|H_T(f)|^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{s_y(f) = s_x(f)\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T)}$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * TF^{-1}[\,\text{sinc}^2(\pi f T)\,] = R_x(\tau) * \frac{1}{T}\Lambda_T(\tau)$$

d'où
$$\boxed{R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(s)\,\frac{1}{T}\Lambda_T(\tau - s)\,ds}$$

La puissance du signal $y(t)$ est $P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\,df$. On a donc

$$\boxed{P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{S_x(f)\,\text{sinc}^2(\pi f T)}_{S_y(f)}\,df}$$

2) La puissance du signal $D(t)$ est

$$P_D(T) = E[D^2(t)] = \frac{1}{2}E\left[\{y((k+1)T) - y(kT)\}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[E[y^2((k+1)T)] + E[y^2(kT)] - 2E[y(kT)\,y((k+1)T)]\right]$$

d'où
$$P_D(T) = \frac{1}{2}[R_y(0) + R_y(0) - 2R_y(T)]$$

i-e
$$\boxed{P_D(T) = R_y(0) - R_y(T)}$$

En utilisant le fait que $R_y(\tau) = TF^{-1}(S_y(f)) = \int_{\mathbb{R}} S_y(f)\,e^{j2\pi f\tau}\,df$

on obtient

$$P_D(T) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{j2\pi f T})\,S_y(f)\,df$$

d'où
$$\boxed{P_D(T) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{j2\pi f T})\,\text{sinc}^2(\pi f T)\,S_x(f)\,df}$$

Mais
$$1 - e^{j2\pi f T} = e^{j\pi f T}\left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}\right) = -2j\,e^{j\pi f T}\sin(\pi f T)$$

c'est-à-dire
$$1 - e^{j2\pi f T} = -2j\cos(\pi f T)\sin(\pi f T) - 2j(j\sin^2\pi f T)$$
$$= \boxed{-j\sin(2\pi f T) + 2\sin^2(\pi f T)}$$

on en déduit

$$P_D(T) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{-j \sin(2\pi f T) \operatorname{sinc}^2(\pi f T)\, s_x(f)}_{\text{fonction impaire}}\, df$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sin^2(\pi f T) \operatorname{sinc}^2(\pi f T)\, s_x(f)}_{\text{fonction paire}}\, df$$

L'intégrale de la première ligne est nulle car la fonction est impaire. En utilisant la parité de $s_x(f)$, on a

$$\boxed{P_D(T) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T^2}\, s_x(f)\, df}$$

3) Bruit blanc

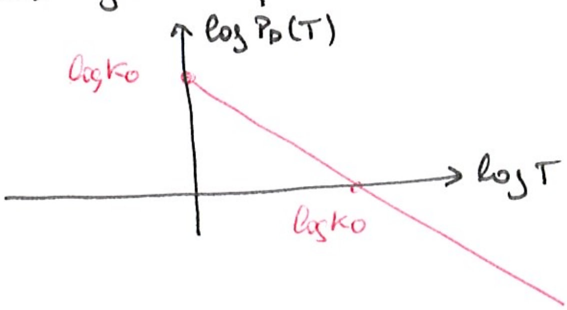
Pour $s_x(f) = K_0$, on a

$$P_D(T) = 4 K_0 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2}\, df$$

$$\underset{u = \pi f T}{=} 4 K_0 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^2} \frac{du}{\pi T}$$

$$= \frac{4 K_0}{\pi T} \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{K_0}{T}}$$

donc $\boxed{\log P_D(T) = \log K_0 - \log T}$ qui est une droite de pente -1 dans en échelles logarithmiques



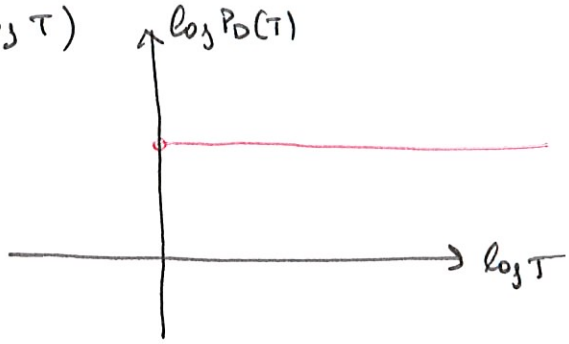
Bruit de Flicker

Pour $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$, on a $P_D(T) = 4 K_1 \int_0^{+\infty} \frac{1}{f} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2}\, df$

$$\underset{u = \pi f T}{=} 4 K_1 \int_0^{+\infty} \frac{\pi T}{u} \frac{\sin^4(u)}{u^2} \frac{du}{\pi T}$$

$$= 4 K_1 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3}\, du = 4 K_1 \log 2$$

donc $\boxed{\log P_D(T) = \log(4K_1 \log 2)}$ qui est une droite de pente 0 dans le repère $(\log P_D(T), \log T)$



Marche aléatoire de fréquence

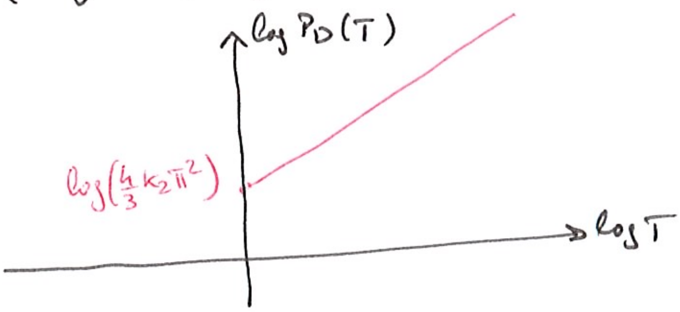
Pour $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$, on a $P_D(T) = 4K_2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{f^2} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} df$

$$= 4K_2 \int_0^{+\infty} \frac{\pi^2 T^2}{u^2} \frac{\sin^4(u)}{u^2} \frac{du}{\pi T}$$

$u = \pi f T$

$$= 4K_2 \pi T \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du}_{\pi/3}$$

d'où $\boxed{\log P_D(T) = \log\left(\frac{4}{3} K_2 \pi^2\right) + \log T}$ qui est une droite de pente 1 dans le repère $(\log P_D(T), \log T)$



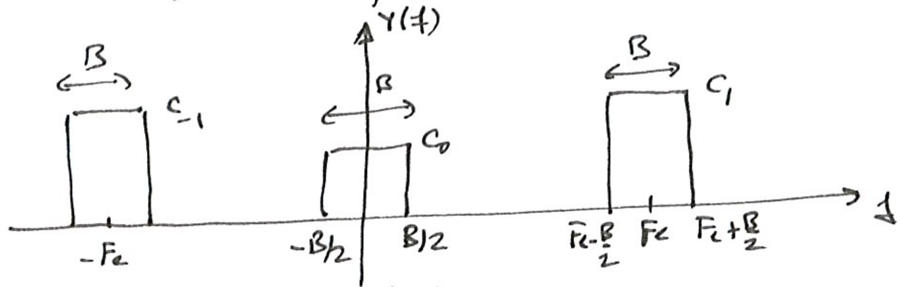
En représentant la variance d'Allan $P_D(T)$ ~~dans un~~ en échelles logarithmiques et en identifiant la pente de la droite $\log P_D(T) = a \log T + b$ (avec $a=0$ $a=1$ ou $a=-1$) on peut identifier le type de bruit affectant un signal donné. Cette méthode est beaucoup utilisée pour identifier les bruits affectant les capteurs utilisés pour la navigation GPS.

1) On a $Y(f) = X(f) * G(f) = X(f) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \delta(f-kF_e)$

c'est-à-dire

$$\boxed{Y(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, X(f-kF_e)}$$

Dans le cas où $x(t)$ est un signal passe-bas idéal tel que $X(f) = \Pi_B(f)$ et avec $F_e > 2F_{max}$, on a la représentation suivante



Pour pouvoir récupérer $x(t)$ par filtrage, il est nécessaire que les spectres ci-dessus ne se chevauchent pas (i.e qu'il n'y ait pas repliement). La condition assurant cette propriété est

$$F_e - \frac{B}{2} > \frac{B}{2} \iff \boxed{F_e > B}$$

2) La fonction d'autocorrélation du signal $z(t)$ s'écrit

$$E[z(t)z^*(t-\tau)] = E[x(t)x^*(t-\tau)]\,E[g(t+\phi)\,g^*(t-\tau+\phi)]$$

ϕ et $x(t)$ indépendants

i.e $\boxed{R_z(\tau) = R_x(\tau)\, R_g(\tau)}$

Le calcul de $R_g(\tau)$ se fait comme suit

$$R_g(\tau) = E\left[\sum_k c_k e^{j2\pi kF_e(t+\phi)} \sum_l c_l^* e^{-j2\pi l F_e(t-\tau+\phi)}\right]$$

on pose $\theta = 2\pi F_e\phi$ qui suit une loi uniforme sur $[0,2\pi[$. Alors

$$R_g(\tau) = \sum_k\sum_l c_k c_l^*\, e^{j2\pi(k-l)F_e t}\, e^{j2\pi l F_e\tau}\, E\left[e^{j2\pi(k-l)F_e\phi}\right]$$

avec $E\left[e^{j2\pi(k-l)F_e\phi}\right] = \int_0^{T_e}\frac{1}{T_e}\, e^{j2\pi(k-l)F_e\phi}\, d\phi = \int_0^{2\pi} e^{(k-l)\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$

Mais on sait que $\int_0^{2\pi} e^{(k-l)\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases}1 & \text{si } k=l\\ 0 & \text{si } k\neq l\end{cases}$

car on intègre $\cos(k-l)\theta$ et $\sin(k-l)\theta$ sur $[0,2\pi[$.

Dans la somme précédente, il ne reste donc que les termes correspondant à $k=l$, ce qui donne

$$\boxed{R_g(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \, e^{j2\pi k F_e \tau}}$$

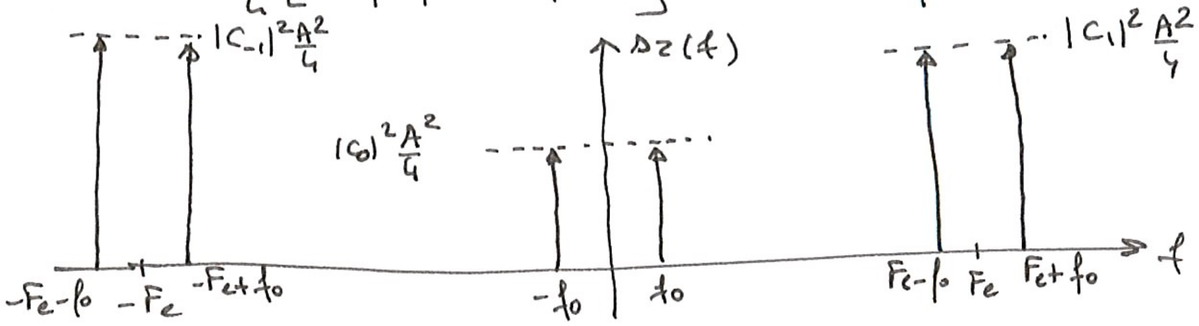
La densité spectrale de puissance de $z(t)$ s'écrit

$$s_z(f) = s_x(f) * s_g(f)$$
$$= s_x(f) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \, \delta(f - kF_e)$$

d'où

$$\boxed{s_z(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \, s_x(f - kF_e)}$$

Lorsque $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, on a $R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ et donc $s_x(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ d'où la représentation de $s_z(f)$



Cette représentation est correspond au cas $\boxed{F_e > 2f_0}$ (condition de Shannon)
Si cette condition n'est pas vérifiée, en filtrant le signal $z(t)$ à l'aide d'un passe-bas idéal, on va récupérer les spectres d'ordres supérieurs ($k=1$ ou $k=-1$ ou...) dans la bande d'intérêt. On va donc restituer une sinusoïde de fréquence différente de f_0. C'est ce qu'on observe sur la figure.