Corrections de l'examen de traitement du signal du 8 décembre 2008

Exercice 1

1)

- Ce résultat a été obtenu en cours

$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right)\right] \\ &= TF\left[x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-kT_e\right)\right] \\ &= X(f) * \left[f_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-kf_e\right)\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$X_e(f) = F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f-kf_e\right)$$

Mais la transformée de Fourier de $x(t)$ est

$$X(f) = \Lambda_{f_m}\left(f\right)$$

donc

$$X_e(f) = f_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Lambda_{f_m}\left(f-kf_e\right)$$

On retrouve la condition de Shannon en disant que les divers spectres $\Lambda_{f_m}\left(f-kF_e\right)$ ne se chevauchent pas, ce qui correspond à

$$f_e - f_m > f_m \Leftrightarrow f_e > 2f_m$$

- La formule d'interpolation de Shannon est l'expression qui permet à partir d'un filtrage passe-bas de $x_e(t)$ de retrouver $x(t)$. Plus précisement, le filtre passe-bas est de transmittance

$$H(f) = \frac{1}{f_e}\Pi_{f_e}(f) \Longleftrightarrow h(t) = \sin c\left(\pi f_e t\right)$$

d'où la formule d'interpolation de Shannon

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) * \sin c\left(\pi f_e t\right)$$

c'est-à-dire

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(kT_e\right)\sin c\left[\pi f_e\left(t-kT_e\right)\right]$$

- Le filtre anti-repliement est un filtre **analogique situé avant le convertisseur analogique-numérique**. Ce filtre évite qu'après échantillonnage certaines fréquences hors de la bande d'intérêt se retrouvent (se replient) dans la bande d'intérêt.

2)

- Le signal restitué s'écrit

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_e(t) * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) * \Pi_{T_e}\left(t-\frac{T_e}{2}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(kT_e\right)\Pi_{T_e}\left(t-kT_e-\frac{T_e}{2}\right) \end{aligned}$$

- La transformée de Fourier de $x_r(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_r(f) &= TF\left[x_r(t)\right] \\ &= TF\left[x_e(t) * h(t)\right] \\ &= f_e\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_m}\left(f-kf_e\right)\right] H(f) \end{aligned}$$

avec

$$H(f) = T_e e^{-j\pi T_e f} \sin c\left(\pi f T_e\right)$$

Le module de cette transformée de Fourier est donc en supposant que f_e est suffisamment grand

$$\left|X_r(f)\right| \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_m}\left(f-kf_e\right)\left|\sin c\left(\pi f T_e\right)\right|$$

On voit donc que chaque spectre $\Lambda_{f_m}\left(f-kf_e\right)$ est perturbé par le terme $\left|\sin c\left(\pi f T_e\right)\right|$ qui génère de la distorsion. C'est pour cette raison que le spectre d'ordre 0 n'apparaît pas comme un triangle. Autour des fréquences f_e et $-f_e$, on observe

$$\Lambda_{f_m}\left(f-f_e\right)\left|\sin c\left(\pi f T_e\right)\right| \text{ et } \Lambda_{f_m}\left(f+kf_e\right)\left|\sin c\left(\pi f T_e\right)\right|$$

- Pour compenser la distorsion (à une phase près), il suffit d'ajouter un filtre de fonction de transfert

$$\frac{1}{T_e \sin c\left(\pi f T_e\right)} = \frac{\pi f}{\sin\left(\pi f T_e\right)}$$

Exercice 2

1) Puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux à énergie finie, on peut calculer leurs transformées de Fourier notées $X(f)$ et $Y(f)$.

- Si $y(t) = x(t) * h(t)$, alors $Y(f) = X(f)H(f)$, et donc

$$\ln\left[|Y(f)|^2\right] = \ln\left[|X(f)|^2\right] + \ln\left[|H(f)|^2\right]$$

d'où

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau).$$

- En prenant la transformée de Fourier de

$$y(t) = x(t) + ax(t-T),$$

on obtient

$$Y(f) = X(f)\left[1 + ae^{-j2\pi fT}\right]$$

donc la transmittance de ce filtre est

$$H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fT}$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ s'obtient par transformée de Fourier inverse de $H(f)$

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t-T)$$

- Le module carré de $H(f)$ se détermine facilement

$$\begin{aligned}
|H(f)|^2 &= \left|1 + ae^{-j2\pi fT}\right|^2 \\
&= 1 + a^2 + 2a\cos(2\pi fT) \\
&= \left(1 + a^2\right)\left[1 + \frac{2a}{1+a^2}\cos(2\pi fT)\right] \\
&= \left(1 + a^2\right)\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT)\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\ln\left[|H(f)|^2\right] = \ln\left(1 + a^2\right) + \ln\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT)\right]$$

Puisque $0 < \gamma < 1$, on a $|\gamma\cos(2\pi fT)| < 1$ et on peut utiliser le développement limité proposé

$$\ln\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\left[\gamma\cos(2\pi fT)\right]^{k+1}.$$

En ne conservant que les premiers termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT)\right] &\simeq \gamma\cos(2\pi fT) - \frac{1}{2}\left[\gamma\cos(2\pi fT)\right]^2 \\
&\simeq \gamma\cos(2\pi fT) - \frac{\gamma^2}{2}\left[\frac{1 + \cos(4\pi fT)}{2}\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
c_h(\tau) &\simeq \ln\left(1+a^2\right)\delta(\tau)+\frac{\gamma}{2}\left[\delta(\tau-T)+\delta(\tau+T)\right]-\frac{\gamma^2}{4}\left[\delta(\tau)+\frac{1}{2}\delta(\tau-2T)+\frac{1}{2}\delta(\tau+2T)\right] \\
&\simeq \left[\ln\left(1+a^2\right)-\frac{\gamma^2}{4}\right]\delta(\tau)+\frac{\gamma}{2}\left[\delta(\tau-T)+\delta(\tau+T)\right]-\frac{\gamma^2}{8}\left[\delta(\tau-2T)+\delta(\tau+2T)\right]
\end{aligned}$$

- Le cepstre de $y(t)$ est défini par $c_y(\tau)=c_x(\tau)+c_h(\tau)$, donc si le cepstre de $x(t)$ n'interfère pas avec les raies de $c_h(\tau)$, on peut identifier T en recherchant les raies présentes dans $c_y(\tau)$.

2)

- Puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux aléatoires, la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)=x(t)+ax(t-T)$ est définie par

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= E\left[y(t)y(t-\tau)\right] \\
&= E\left[x(t)x(t-\tau)\right]+aE\left[x(t-T)x(t-\tau)\right] \\
&\quad +aE\left[x(t)x(t-\tau-T)\right]+a^2E\left[x(t-T)x(t-\tau-T)\right] \\
&= R_x(\tau)+aR_x(\tau-T)+aR_x(\tau+T)+a^2R_x(\tau) \\
&= \left(1+a^2\right)R_x(\tau)+a\left[R_x(\tau-T)+R_x(\tau+T)\right]
\end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance s'en déduit

$$\begin{aligned}
s_y(f) &= s_x(f)\left[1+a^2+ae^{-j2\pi fT}+ae^{j2\pi fT}\right] \\
&= s_x(f)\left[1+a^2+2a\cos(2\pi fT)\right]
\end{aligned}$$

Remarque : on retrouve ces résultats en utilisant les relations de Wiener-Lee.

- Le cepstre du signal $y(t)$ s'obtient alors comme suit

$$\begin{aligned}
c_y(\tau) &= TF^{-1}\left\{\ln\left[s_y(f)\right]\right\} \\
&= TF^{-1}\left\{\ln\left[s_x(f)\right]\right\}+TF^{-1}\left\{\ln\left[1+a^2+2a\cos(2\pi fT)\right]\right\} \\
&= c_x(\tau)+c_h(\tau).
\end{aligned}$$

On retrouve donc la même relation qu'avec les signaux à énergie finie donc la procédure d'identification du retard T proposée au paragraphe 1) est applicable dans le contexte des signaux stationnaires.

3) D'après ce qui précède, les cepstres des signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ définis par

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= x(t)+a_1x(t-T_1), \\
y_2(t) &= \left[x(t)+a_2x(t-T_2)\right]*g(t),
\end{aligned}$$

sont définis par

$$\begin{aligned}
c_{y_1}(\tau) &= c_x(\tau)+c_{h_1}(\tau) \\
c_{y_2}(\tau) &= c_x(\tau)+c_{h_2}(\tau)+c_g(\tau)
\end{aligned}$$

d'où

$$c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau) = c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau) + c_g(\tau)$$

Dans la mesure où les fonctions $c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau)$ et $c_g(\tau)$ ne se superposent pas (ce qui est une condition simple a réaliser car $c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau)$ ne contient que quelques raies), on peut estimer $c_g(\tau)$ à partir de $c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau)$ et en déduire une estimation de la transmittance du filtre $G(f)$.

4) On désire maintenant étudier l'influence d'un bruit additif $n(t)$ sur l'estimation du retard T. Comme les signaux $x(t)$ et $n(t)$ sont indépendants, $x^*(t) = x(t) + ax(t-T)$ le sont aussi. La densité spectrale de puissance de $z(t)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}
s_z(f) &= s_x(f)\left[1 + a^2 + 2a\cos(2\pi fT)\right] + s_n(f) \\
&= (1+a^2)s_x(f)\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT)\right] + s_n(f) \\
&= (1+a^2)s_x(f)\left[1 + \gamma\cos(2\pi fT) + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)s_x(f)}\right] \\
&= (1+a^2)s_x(f)\left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)s_x(f)}\right]\left\{1 + \gamma\left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)s_x(f)}\right]^{-1}\cos(2\pi fT)\right\} \\
&= (1+a^2)s_x(f)\left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)s_x(f)}\right]\left[1 + \gamma B(f)\cos(2\pi fT)\right]
\end{aligned}$$

avec

$$B(f) = \left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)s_x(f)}\right]^{-1}$$

On en conclut

$$\ln\left[s_z(f)\right] = \ln\left[(1+a^2)s_x(f)\right] + A(f) + \ln\left[1 + \gamma B(f)\cos(2\pi fT)\right],$$

où $\gamma = \frac{2a}{a^2+1}$, $A(f)$ est le bruit additif défini par

$$A(f) = \ln\left[1 + \frac{s_n(f)}{(1+a^2)\, s_x(f)}\right],$$

et $B(f)$ est un bruit multiplicatif défini ci-dessus. L'effet de ces bruits sur l'estimation du retard T a fait l'objet de l'article ci-dessous

- Joseph C. Hassab and Ronald Boucher, "A Probabilistic Analysis of Time Delay Extraction by the Cepstrum in Stationary Gaussian Noise," IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 22, no 4, July 1976.