Corrections de l'examen de traitement du signal du 18 janvier 2010

Exercice 1

1) La transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta\left(t - kT_e\right)$$

est définie par

$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF\left[x_e(t)\right] = TF\left[x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-kT_e\right)\right] \\ &= X(f) * F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-kF_e\right) = F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-kF_e) \end{aligned}$$

Puisque

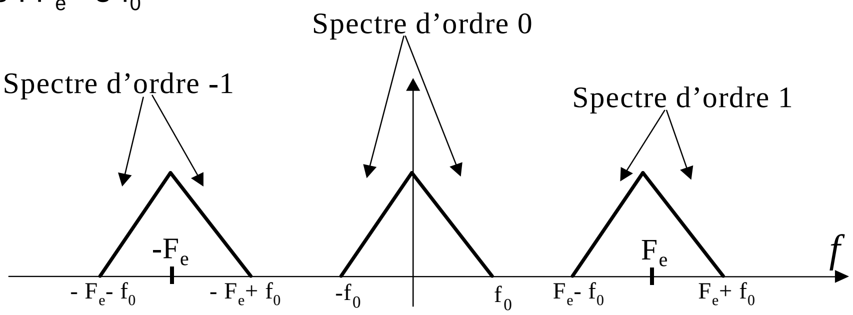
$$X(f) = TF\left[x(t)\right] = TF\left[f_0 \sin c^2\left(\pi f_0 t\right)\right] = \Lambda_{f_0}(f)$$

on obtient

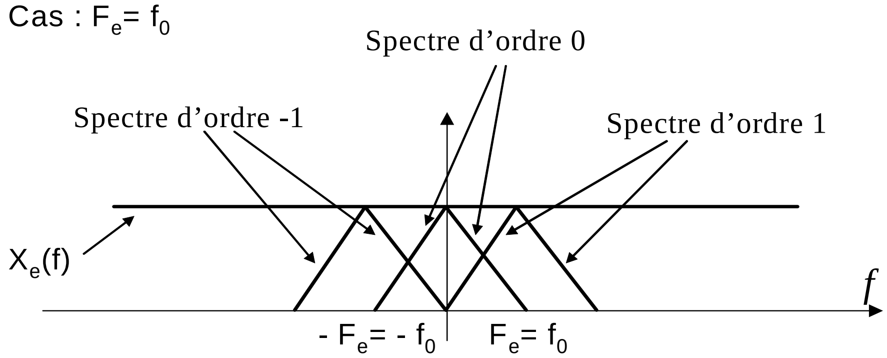
$$X_e(f) = F_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Lambda_{f_0}(f-kF_e)$$

Pour $F_e = 3f_0$ et $F_e = f_0$, on obtient les représentations suivantes (dans le deuxième cas, on a un repliement du spectre puisqu'on ne respecte pas la condition de Shannon).

Premier Cas : $F_e = 3\ f_0$



Deuxième Cas : $F_e = f_0$



2) On désire restituer le signal $x(t)$ en filtrant le signal échantillonné $x_e(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } |f| < F_e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Lorsque $F_e = 3f_0$, on récupère le spectre d'ordre 0, c'est-à-dire

$$F_e X(f) = 3f_0 X(f)$$

c'est à-dire le signal temporel

$$x_r(t) = TF^{-1}\left[3f_0 X(f)\right] = 3f_0 x(t)$$

Par contre, lorsque $F_e = f_0$, on récupère en sortie du filtre de restitution

$$F_e \Pi_{F_e}(f) = f_0 \Pi_{f_0}(f)$$

c'est à-dire le signal temporel

$$x_r(t) = TF^{-1}\left[f_0 \Pi_{f_0}(f\right] = f_0^2 \sin c\left(\pi f_0 t\right)$$

Le signal restitué est très différent du signal d'origine car on n'a pas respecté la condition de Shannon.

Exercice 2

1) Dans le cas où $X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t\right)$, la sortie de l'amplificateur Klystron est définie par

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) - kX^3(t) \\ &= A\cos\left(2\pi f_0 t\right) - kA^3\cos^3\left(2\pi f_0 t\right) \\ &= A\cos\left(2\pi f_0 t\right) - kA^3\left[\frac{1}{4}\cos\left(6\pi f_0 t\right) + \frac{3}{4}\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right] \\ &= A\left(1 - \frac{3kA^2}{4}\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - \frac{kA^3}{4}\cos\left(6\pi f_0 t\right) \end{aligned}$$

Pour que le spectre du signal de sortie $Y(t)$ ne contienne pas la fréquence du signal d'entrée f_0, il faut annuler le premier terme, c'est-à-dire choisir k tel que

$$1 - \frac{3kA^2}{4} = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{4}{3A^2}$$

On a alors

$$Y(t) = -\frac{A}{3}\cos\left(6\pi f_0 t\right)$$

qui est un signal de puissance $P_Y = \frac{A^2}{18}$ tel que

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{A^2}{18}\cos\left(6\pi f_0 \tau\right) \\ s_Y(f) &= \frac{A^2}{36}\left[\delta\left(f - 3f_0\right) + \delta\left(f + 3f_0\right)\right] \end{aligned}$$

2) En appliquant le théorème de Price, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E\left[\left(1-3kX^2(t)\right)\left(1-3kX^2(t-\tau)\right)\right]\\ &= 1-6k\sigma^2+9k^2E\left[X^2(t)X^2(t-\tau)\right]\end{aligned}$$

On a vu en cours que la fonction d'autocorrélation du quadrateur était donnée par

$$\begin{aligned}E\left[X^2(t)X^2(t-\tau)\right] &= 2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)\\ &= 2R_X^2(\tau)+\sigma^4\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = 1-6k\sigma^2+9k^2\sigma^4+18k^2R_X^2(\tau)$$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient

$$R_Y(\tau) = \left(1-3k\sigma^2\right)^2 R_X(\tau)+6k^2R_X^3(\tau)+C$$

où C est une constante additive. Pour déterminer la constante additive C, on fait $\tau = 0$ dans l'expression précédente et on obtient

$$C = R_Y(0)-\left(1-3k\sigma^2\right)^2 R_X(0)-6k^2R_X^3(0)$$

Mais

$$\begin{aligned}R_Y(0) &= E\left[Y^2(t)\right]\\ &= E\left[X^2(t)\right]-2kE\left[X^4(t)\right]+k^2E\left[X^6(t)\right]\\ &= \sigma^2-2km_4+k^2m_6\end{aligned}$$

En utilisant

$$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)(2n-3)...5\times 3\times 1\right]\sigma^{2n}$$

on obtient

$$R_Y(0) = \sigma^2-6k\sigma^4+15k^2\sigma^6$$

d'où

$$C = \sigma^2-6k\sigma^4+15k^2\sigma^6-\left(1-6k\sigma^2+9k^2\sigma^4\right)\sigma^2-6k^2\sigma^6 = 0$$

Exercice 3

1) Puisque $s(t)$ un signal à énergie finie, $y_s(t)$ est aussi à énergie finie et

$$Y_s(f) = TF\left[y_s(t)\right] = S(f)H(f)$$

Donc

$$\begin{aligned}y_s(t) &= TF^{-1}\left[S(f)H(f)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft}df\end{aligned}$$

En faisant $t = t_0$ dans cette égalité, on obtient le résultat demandé. Lorsque $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$, on a

$$S(f) = AT \sin c\,(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}$$

De plus, si $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} I_{[0,T]}(t)$, on a

$$H(f) = \sqrt{T} \sin c\,(\pi T f)\, e^{-j\pi T f}$$

d'où

$$y_s(t) = A\sqrt{T} \int_{\mathbb{R}} T \sin c^2\,(\pi T f)\, e^{j2\pi f(t-T)} df$$

Mais

$$\begin{aligned} TF^{-1}\left[T \sin c^2\,(\pi T f)\right] &= \Lambda_T\,(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} T \sin c^2\,(\pi T f)\, e^{j2\pi f \tau} df \end{aligned}$$

Donc

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T\,(t_0 - T)$$

2) La relation de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_{y_b}(f) = |H(f)|^2\, s_b(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= E\left[y_b^2(t)\right] = R_{y_b}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_{y_b}(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2\, s_b(f) df \end{aligned}$$

Lorsque $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ et pour le filtre de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2\, df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\, dt \text{ (égalité de Parseval)} \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

3) Dans le cas d'un bruit blanc défini par $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$, on a

$$H_0(f) = \frac{2k}{N_0} S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= TF^{-1}\left[H_0(f)\right] \\ &= \frac{2k}{N_0} TF^{-1}\left[S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}\right] \end{aligned}$$

La TF inverse de $S^*(f)$ est

$$TF^{-1}\left[S^*(f)\right] = s^*(-t)$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{2k}{N_0} s^*\left[-(t-t_0)\right] \\ &= \frac{2k}{N_0} s^*\left[t_0 - t\right] \end{aligned}$$

4) On choisit $t_0 = T$ et on suppose que $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$, $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} I_{[0,T]}(t)$ et que $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$.

- D'après ce qui précède, on a

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T(t_0 - T)$$

Donc en faisant $t_0 = T$, on obtient

$$y_s(T) = A\sqrt{T}$$

- De plus

$$\begin{aligned} y_b(t) &= b(t) * h(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u) b(t-u) du \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} b(t-u) du \end{aligned}$$

En faisant $t = T$ et en effectuant le changement de variables $v = T - u$, on obtient

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(v) dv$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E\left[y_b(T)\right] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T E\left[b(v)\right] dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T 0 dv = 0 \end{aligned}$$

La variance de $y_b(T)$ est donc

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left[y_b(T)\right] &= E\left[y_b^2(T)\right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E\left[b(u)b(v)\right] dudv \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(u-v) dudv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \left[\int_0^T \delta(u-v) du\right] dv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T dv \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

Si $y_b(T)$ est un signal Gaussien, comme $y_s(T)$ est un signal déterministe, $y(T) = y_s(T)+y_b(T)$ est aussi un signal Gaussien de moyenne

$$E\left[y(T)\right] = y_s(T) + E\left[y_b(T)\right] = y_s(T) = A\sqrt{T}$$

et de variance

$$\text{var}\left[y(T)\right] = \text{var}\left[y_s(T) + y_b(T)\right] = \text{var}\left[y_b(T)\right] = \frac{N_0}{2}$$

Sa densité de probabilité s'écrit donc

$$p\left[y(T); A\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{\left(y(T) - A\sqrt{T}\right)^2}{N_0}\right]$$

5) La stratégie

$$H_0 \text{ est acceptée si } p\left[y(T); A = -1\right] P\left[A = -1\right] > p\left[y(T); A = +1\right] P\left[A = +1\right]$$

consiste à accepter H_0 si

$$\frac{q}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{\left(y(T) + \sqrt{T}\right)^2}{N_0}\right] > \frac{p}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{\left(y(T) - \sqrt{T}\right)^2}{N_0}\right]$$

c'est-à-dire

$$\ln q - \frac{\left(y(T) + \sqrt{T}\right)^2}{N_0} > \ln p - \frac{\left(y(T) - \sqrt{T}\right)^2}{N_0} \iff \ln q - \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0} > \ln p + \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0}$$

d'où finalement

$$H_0 \text{ est acceptée si } y(T) < \ln\left(\frac{q}{p}\right)\frac{N_0}{2\sqrt{T}}$$

Dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$, on en déduit

$$H_0 \text{ est acceptée si } y(T) < 0$$

ce qui est une règle de décision logique.