

Corrections de l'examen de traitement du signal du 18 janvier 2012

Exercice 1 : Rapport signal à bruit

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle $h(t)$

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-at) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire $x(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ et d'un bruit blanc stationnaire $b(t)$ de densité spectrale de puissance $s_b(f) = \sigma_b^2$, c'est-à-dire

$$x(t) = s(t) + b(t).$$

1) La transmittance de ce filtre s'écrit

$$H(f) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

2) La densité spectrale de puissance de $y_b(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} s_{y_b}(f) &= s_b(f) |H(f)|^2 \\ &= \frac{\sigma_b^2}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

d'où la puissance de y_b

$$P_{y_b} = \int \frac{\sigma_b^2}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df$$

On fait le changement de variables $2\pi f = au$ et on obtient

$$P_{y_b} = \int \frac{\sigma_b^2}{a^2 + a^2 u^2} \frac{a}{2\pi} du = \frac{\sigma_b^2}{2a}$$

3) La TF du signal filtré s'écrit

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= S(f)H(f) \\ &= \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] M(f) e^{j\phi(f)} \end{aligned}$$

avec $H(f) = M(f)e^{j\phi(f)}$. On en déduit

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) M(-f_0) e^{j\phi(-f_0)} + \delta(f - f_0) M(f_0) e^{j\phi(f_0)}] \\ &= \frac{A}{2} M(f_0) [\delta(f + f_0) e^{-j\phi(f_0)} + \delta(f - f_0) e^{j\phi(f_0)}] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \frac{A}{2} M(f_0) [e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi(f_0)} + e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi(f_0)}] \\ &= AM(f_0) \cos[2\pi f_0 t + \phi(f_0)] \end{aligned}$$

et donc la puissance de $y_s(t)$ est

$$P_{y_s} = \frac{A^2 M^2(f_0)}{2} = \frac{A^2}{2[a^2 + 4\pi^2 f_0^2]}.$$

4) Le rapport signal sur bruit du filtre s'écrit

$$\begin{aligned} \text{RSB} &= \frac{P_{y_s}}{P_{y_b}} \\ &= \frac{A^2}{\sigma_b^2} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f_0^2} = g(a). \end{aligned}$$

La fonction $g'(a)$ est du signe de

$$\begin{aligned} h(a) &= a^2 + 4\pi^2 f_0^2 - 2a^2 \\ &= 4\pi^2 f_0^2 - a^2 \end{aligned}$$

Le RSB est donc maximal pour $a = 2\pi f_0$.

5) Le rapport signal sur bruit en décibels est défini par

$$\text{RSB}_{dB} = 10 \log_{10} \left[\frac{P_{y_s}}{P_{y_b}} \right]$$

donc

- $\text{RSB}_{dB} = 0\text{dB}$ signifie que la puissance du signal est égale à la puissance du bruit
- $\text{RSB}_{dB} = 20\text{dB}$ signifie que la puissance du signal est cent fois supérieure à la puissance du bruit
- et $\text{RSB}_{dB} = -20\text{dB}$ signifie que la puissance du signal est cent fois inférieure à la puissance du bruit

Exercice 2 : Klystron

1) Dans le cas où $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, la sortie de l'amplificateur Klystron est définie par

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) - kX^3(t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) - kA^3 \cos^3(2\pi f_0 t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) - kA^3 \left[\frac{1}{4} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{3}{4} \cos(2\pi f_0 t) \right] \\ &= A \left(1 - \frac{3kA^2}{4} \right) \cos(2\pi f_0 t) - \frac{kA^3}{4} \cos(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Pour que le spectre du signal de sortie $Y(t)$ ne contienne pas la fréquence du signal d'entrée f_0 , il faut annuler le premier terme, c'est-à-dire choisir k tel que

$$1 - \frac{3kA^2}{4} = 0 \iff k = \frac{4}{3A^2}$$

On a alors

$$Y(t) = -\frac{A}{3} \cos(6\pi f_0 t)$$

qui est un signal de puissance $P_Y = \frac{A^2}{18}$ tel que

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{A^2}{18} \cos(6\pi f_0 \tau) \\ s_Y(f) &= \frac{A^2}{36} [\delta(f - 3f_0) + \delta(f + 3f_0)] \end{aligned}$$

2) En appliquant le théorème de Price, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[\left(1 - 3kX^2(t) \right) \left(1 - 3kX^2(t - \tau) \right) \right] \\ &= 1 - 6k\sigma^2 + 9k^2 E \left[X^2(t) X^2(t - \tau) \right] \end{aligned}$$

On a vu en cours que la fonction d'autocorrélation du quadrateur était donnée par

$$\begin{aligned} E \left[X^2(t) X^2(t - \tau) \right] &= 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0) \\ &= 2R_X^2(\tau) + \sigma^4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= 1 - 6k\sigma^2 + 9k^2\sigma^4 + 18k^2 R_X^2(\tau) \\ &= \left(1 - 3k\sigma^2 \right)^2 + 18k^2 R_X^2(\tau) \end{aligned}$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$R_Y(\tau) = \left(1 - 3k\sigma^2 \right)^2 R_X(\tau) + 6k^2 R_X^3(\tau) + C$$

où C est une constante additive. Pour déterminer la constante additive C , on fait $\tau = 0$ dans l'expression précédente et on obtient

$$C = R_Y(0) - \left(1 - 3k\sigma^2\right)^2 R_X(0) - 6k^2 R_X^3(0)$$

Mais

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E[Y^2(t)] \\ &= E[X^2(t)] - 2kE[X^4(t)] + k^2E[X^6(t)] \\ &= \sigma^2 - 2km_4 + k^2m_6 \end{aligned}$$

En utilisant

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n-1)(2n-3)\dots 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}$$

on obtient

$$R_Y(0) = \sigma^2 - 6k\sigma^4 + 15k^2\sigma^6$$

d'où

$$C = \sigma^2 - 6k\sigma^4 + 15k^2\sigma^6 - \left(1 - 6k\sigma^2 + 9k^2\sigma^4\right) \sigma^2 - 6k^2\sigma^6 = 0$$

Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal complexe

1) Si $s(t)$ est un signal déterministe à énergie finie réel, alors les parties réelle et imaginaire de sa transformée de Fourier s'écrivent

$$\begin{aligned} S_r(f) &= \int s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ S_i(f) &= \int s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

donc en utilisant le fait que la fonction $f \rightarrow \cos(2\pi ft)$ est paire et que la fonction $f \rightarrow \sin(2\pi ft)$ est impaire, on obtient

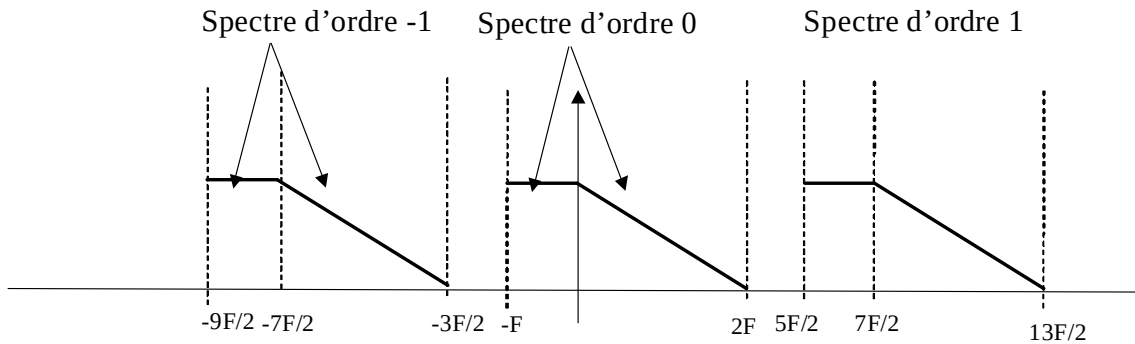
$$S_r(-f) = S_r(f) \text{ et } S_i(-f) = -S_i(f).$$

2) Puisque la transformée de Fourier du signal $s(t)$ est réelle, on a

$$S_i(f) = 0 \text{ et } S_r(f) = \begin{cases} A \text{ si } -F < f < 0 \\ A \left(1 - \frac{f}{2F}\right) \text{ si } 0 \leq f < 2F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Comme $S_r(f)$ n'est pas une fonction paire, le signal $x(t)$ est complexe.

3) On échantillonne le signal $s(t)$ à la fréquence $f_e = 7F/2$. La transformée de Fourier du signal échantillonné peut se représenter comme suit



Pour restituer le signal $s(t)$ par filtrage du signal $s_e(t)$ sans erreur, il suffit donc de choisir

$$-\frac{3F}{2} < F_1 < -F \text{ et } 2F < F_2 < \frac{5F}{2}$$

La fréquence d'échantillonnage est

$$f_e = \frac{7F}{2} < 2F_{\max} = 4F$$

et donc elle ne respecte pas la condition de Shannon. Ceci peut paraître étrange puisqu'on peut reconstruire $s(t)$ à partir de $s_e(t)$ sans erreur. On a profité du fait que le spectre de $s(t)$ n'occupe pas toute la bande $[-2F, 2F]$ pour créer un repliement des spectres d'ordres supérieurs qui ne se superposent pas entre eux.

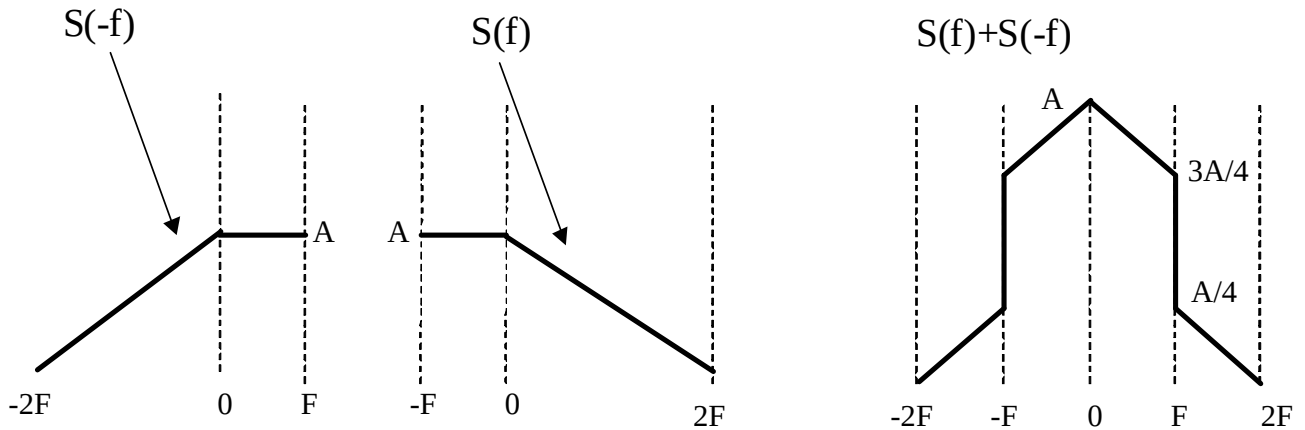
4) On considère un signal complexe $s(t)$ et sa partie réelle notée $r(t)$ telle que

$$r(t) = \frac{1}{2} [s(t) + s^*(t)]$$

Alors la transformée de Fourier de $r(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{2}S(f) + \frac{1}{2}S^*(-f) \\ &= \frac{1}{2}S(f) + \frac{1}{2}S(-f) \end{aligned}$$

et est représentée ci-dessous



La condition de Shannon pour le signal réel $r(t)$ est

$$f_e > 2F_{\max} = 4F$$

Comme le spectre de $r(t)$ occupe toute la bande $[-2F, 2F]$, on ne peut échantillonner avec une fréquence inférieure à $4F$ (limite inférieure de Shannon) si on veut restituer $r(t)$ à partir de $r_e(t)$ sans erreur. Le fait de prendre la partie réelle du signal $s(t)$ à crée un signal réel dont le spectre occupe toute la bande $[-2F, 2F]$ et donc on ne bénéficie plus de la bonne propriété de la question précédente.