Corrections de l'examen de traitement du signal (signaux aléatoires) du mercredi 8 janvier 2014.

Exercice 1 (3 points)

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T] \\ -A \text{ si } t \in [-T, 0[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où A et T sont des constantes positives. Le signal $x(t)$ est-il à énergie finie ou à puissance finie ? Déterminer l'énergie, la puissance moyenne, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$.

Correction

Il est clair que le signal $x(t)$ est à énergie finie car

$$E = \int_{\mathbb{R}} x^2(t)dt = \int_{-T}^{T} A^2 dt = 2TA^2.$$

La puissance moyenne de $x(t)$ est donc

$$P = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} x^2(t)dt = 0.$$

On peut remarquer que $x(t)$ s'écrit

$$x(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) - A\Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Donc sa transformée de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} X(f) &= A\exp(j\pi fT)\, T \sin c\, (\pi fT) - A\exp(-j\pi fT)\, T \sin c\, (\pi fT) \\ &= 2jAT \sin c\, (\pi fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

et sa densité spectrale de puissance est

$$s_X(f) = |X(f)|^2 = 4A^2T^2 \sin c^2(\pi fT) \sin^2(\pi fT)$$

La fonction d'autocorrélation de $x(t)$ est donc

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \left(4A^2T\right) \mathrm{TF}^{-1}\left[T \sin c^2(\pi fT)\right] * \mathrm{TF}^{-1}\left[\sin^2(\pi fT)\right] \\ &= 4A^2T\Lambda_T(\tau) * \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{1 - \cos(2\pi fT)}{2}\right] \\ &= 2A^2T\Lambda_T(\tau) * \left[\delta(\tau) - \frac{1}{2}\delta(\tau - T) - \frac{1}{2}\delta(\tau + T)\right] \\ &= A^2T\left[2\Lambda_T(\tau) - \Lambda_T(\tau - T) - \Lambda_T(\tau + T)\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2 (3 points)}}$

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\cos(\pi f_0 t)$$

où A, B et f_0 sont des constantes positives. Déterminer l'énergie, la puissance, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

Correction
Il est clair que $x(t)$ est un signal périodique de période $2T_0$ car

$$\cos(\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{2} t\right).$$

Sa décomposition en série de Fourier est

$$x(t) = \frac{A}{2}\exp(j2\pi f_0 t) + \frac{A}{2}\exp(-j2\pi f_0 t) + \frac{B}{2}\exp(j\pi f_0 t) + \frac{B}{2}\exp(-j\pi f_0 t)$$

D'après le cours, on en déduit sa densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0) + \frac{B^2}{4}\delta\left(f - \frac{f_0}{2}\right) + \frac{B^2}{4}\delta\left(f + \frac{f_0}{2}\right)$$

Sa fonction d'autocorrélation s'écrit alors

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4}\exp(j2\pi f_0 \tau) + \frac{A^2}{4}\exp(-j2\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{4}\exp(j\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{4}\exp(-j\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{2}\cos(\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3 (3 points)}}$

On considère un bruit blanc $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale $s_X(f)$ et on construit le signal

$$Y(t) = AX(t) + BX(t - \theta)$$

où A, B et θ sont des constantes positives. Montrer que le signal $Y(t)$ est stationnaire et déterminer sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale de puissance.

Correction
La moyenne de $X(t)$ est

$$E[Y(t)] = AE[X(t)] + BE[X(t - \theta)] = 0$$

Sa fonction d'autocorrélation est

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t-\tau)] &= E\{[AX(t) + BX(t-\theta)][AX(t-\tau) + BX(t-\tau-\theta)]\} \\ &= A^2 R_X(\tau) + ABR_X(\tau+\theta) + BAR_X(\tau-\theta) + B^2 R_X(\tau) \\ &= \left(A^2 + B^2\right) R_X(\tau) + AB[R_X(\tau+\theta) + R_X(\tau-\theta)] \end{aligned}$$

Le signal $X(t)$ est donc stationnaire. Sa densité spectrale de puissance est

$$s_Y(f) = \left(A^2 + B^2\right) s_X(f) + ABs_X(f) \left[\exp(j2\pi f\theta) + \exp(-j2\pi f\theta)\right]$$

Exercice 4 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne $E\left[X(t)\right] = m$, de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. On construit le signal

$$Y(t) = X(t) - AX(t-1).$$

Montrer que $Y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps (LIT) d'entrée $X(t)$ et préciser la transmittance et la réponse impulsionnelle de ce filtre. En déduire que $X(t)$ est la sortie d'un filtre LIT d'entrée $Y(t)$ et préciser la transmittance de ce filtre. Quelle est la relation reliant les densités spectrales de $X(t)$ et $Y(t)$?

Correction

On a

$$Y(t) = X(t) - AX(t-1) = X(t) * \left[\delta(t) - A\delta(t-1)\right]$$

Le signal $Y(t)$ peut donc être obtenu par filtrage linéaire invariant dans le temps (LIT) de $X(t)$. La réponse impulsionnelle de ce filtre est

$$h(t) = \delta(t) - A\delta(t-1)$$

et donc sa transmittance s'écrit

$$H(f) = 1 - A\exp\left(-j2\pi f\right)$$

Le signal $X(t)$ peut donc être obtenu par filtrage (inverse) de $Y(t)$ avec un filtre de transmittance

$$K(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 - A\exp\left(-j2\pi f\right)}$$

Les densités spectrales de $X(t)$ et $Y(t)$ sont reliées par la relation de Wiener-Lee

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f)\left|H(f)\right|^2 \\ &= s_X(f)\left[1 + A^2 - 2A\cos\left(2\pi f\right)\right] \end{aligned}$$

Exercice 5 (3 points)

On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 5kHz$ à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 8kHz$. Déterminer la densité spectrale du signal échantillonné $x_e(t)$ et représenter la graphiquement pour $|f| < 12kHz$. Quel signal obtient-on si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_c = 4kHz$? Même question si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante $[-6kHz, -4kHz] \cup [4kHz, 6kHz]$.

Correction

Cet exercice a été traité en cours. La transformée de Fourier du signal $X(t)$ est

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

Le signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_e) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

Donc

$$X_e(f) = X(f)\left[F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e)\right] = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e)$$

Le spectre d'ordre 0 est

$$\begin{aligned}
X_0(f) &= F_e X(f) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f - f_0) + \frac{F_e}{2}\delta(f + f_0) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f - 5\text{kHz}) + \frac{F_e}{2}\delta(f + 5\text{kHz})
\end{aligned}$$

Le spectre d'ordre 1 est

$$\begin{aligned}
X_1(f) &= F_e X(f - F_e) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f - f_0 - F_e) + \frac{F_e}{2}\delta(f + f_0 - F_e) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f - 13\text{kHz}) + \frac{F_e}{2}\delta(f - 3\text{kHz})
\end{aligned}$$

Le spectre d'ordre -1 est

$$\begin{aligned}
X_{-1}(f) &= F_e X(f + F_e) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f - f_0 + F_e) + \frac{F_e}{2}\delta(f + f_0 + F_e) \\
&= \frac{F_e}{2}\delta(f + 3\text{kHz}) + \frac{F_e}{2}\delta(f + 13\text{kHz}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_c = 4$kHz, on obtient donc une sinusoide de fréquence $f_r = 3$kHz. Si on filtre le signal $x_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante $[-6kHz, -4kHz] \cup [4kHz, 6kHz]$, on obtient une sinusoide de fréquence $f_r = 5$kHz.

Exercice 6 (3 points)

On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle, de puissance $E\left[X^2(t)\right] = \sigma^2$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t-\tau)\right]$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $Y(t) = aX(t) + bX^2(t)$ (où a et b sont deux constantes) en fonction de $R_X(\tau)$ et d'une constante additive notée C. Déterminer ensuite la constante C.

Correction

En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right] \\ &= E\left\{\left[a + 2bX(t)\right]\left[a + 2bX(t-\tau)\right]\right\} \\ &= a^2 + 4b^2 R_X(\tau) \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + 2b^2 R_X^2(\tau) + C$$

Pour déterminer la constante C, il suffit comme d'habitude de faire $\tau = 0$ dans la relation ci-dessus. On a alors

$$C = R_Y(0) - a^2 R_X(0) - 2b^2 R_X^2(0).$$

Mais

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E\left[Y^2(t)\right] \\ &= E\left[a^2 X^2(t) + 2abX^3(t) + b^2 X^4(t)\right] \\ &= a^2\sigma^2 + b^2\left(3\sigma^4\right). \end{aligned}$$

D'où

$$C = b^2\sigma^4.$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est donc

$$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + 2b^2 R_X^2(\tau) + b^2\sigma^4.$$

Exercice 7 (2 points)

On considère un processus de Poisson de paramètre λ. Que représente le paramètre λ (justifier votre réponse) ? Déterminer la probabilité que le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[-\tau, \tau[$ (avec $\tau > 0$) soit égal à 1.

Correction

λ est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur $\tau = 1$ puisque

$$E\left[N(t,\tau)\right] = \lambda\left|\tau\right| \Longrightarrow \lambda = E\left[N(t,\tau=1)\right]$$

On sait que le nombre d'instants dans l'intervalle $[t, t+\tau[$ noté $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\left|\tau\right|$. Le nombre d'instants appartenant à l'intervalle $[-\tau, \tau[$ suit donc une loi de Poisson de paramètre $2\lambda\tau$, d'où

$$\begin{aligned} P\left[N(-\tau, 2\tau) = 1\right] &= \frac{(2\lambda\tau)^1}{1!}\exp\left(-2\lambda\tau\right) \\ &= (2\lambda\tau)\exp\left(-2\lambda\tau\right) \end{aligned}$$