Correction du partiel de Traitement du Signal
Année 2006/2007

Exercice 1 : Filtrage d'une sinusoïde

1) a) On a $X_1(f) = \frac{A}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ donc

$$Y_1(f) = X_1(f)H(f) = \frac{A}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\,M(f)e^{j\phi(f)}$$

En utilisant la propriété $H(f)\,\delta(f-f_0) = H(f_0)\,\delta(f-f_0)$, la parité de $M(f)$ et l'imparité de $\phi(f)$, on obtient

$$Y_1(f) = \frac{A}{2}M(f_0)\left[e^{j\phi(f_0)}\,\delta(f-f_0) + e^{-j\phi(f_0)}\,\delta(f+f_0)\right]$$

c'est-à-dire, en posant $\phi(f_0) = \phi$

$$Y_1(f) = \frac{A}{2}M(f_0)\left[e^{j\phi}\,\delta(f-f_0) + e^{-j\phi}\,\delta(f+f_0)\right]$$

En prenant la TF inverse, on obtient

$$y_1(t) = \frac{A}{2}M(f_0)\left[e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

i-e $\boxed{y_1(t) = A\,M(f_0)\cos(2\pi f_0 t+\phi)}$ d'où $\boxed{B = A\,M(f_0) \text{ et } \phi = \phi(f_0)}$

b) La puissance du signal $y_1(t)$ est

$$P_1 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} y_1^2(t)\,dt = \boxed{\frac{A^2M^2(f_0)}{2}}$$

On voit donc que la puissance du signal de sortie est la puissance du signal d'entrée ($\frac{A^2}{2}$) multipliée par le module de la fonction de transfert à la fréquence f_0. Pour identifier $M(f)$, il suffit donc d'envoyer plusieurs sinusoïdes à des fréquences différentes $f_1, \dots, f_N$, de mesurer les puissances des signaux d'entrée et de sortie à ces différentes fréquences, de calculer le rapport entre les puissances de sortie et les puissances d'entrée. On pourra alors évaluer $M^2(f_1), \dots, M^2(f_N)$.

c) La fonction d'autocorrélation du signal $y_1(t)$ est

$$R_{y_1}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y_1(t)\,y_1(t-\tau)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} B\cos(2\pi f_0 t+\phi)\,B\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)\,dt$$

d'où

$$R_{y_1}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} B^2\left[\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0\tau + 2\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]dt$$

$$\boxed{R_{y_1}(\tau) = \frac{B^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

Par suite, la densité spectrale de puissance de $y_1(t)$ est

$$\boxed{s_{y_1}(f) = \frac{B^2}{4}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]}$$

2) a) Le signal $y_2(t)$ est <u>aléatoire</u> de fonction d'autocorrélation

$$R_{y_2}(\tau) = E[y_2(t)\, y_2(t-\tau)^*]$$

et de <u>densité spectrale de puissance</u> $S_{y_2}(f) = S_{x_2}(f)\, |H(f)|^2$ (relation de Wiener-Lee). Mais

$$R_{x_2}(\tau) = E[x_2(t)\, x_2(t-\tau)] = E[A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, A\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\theta + 4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)]$$

$$\boxed{R_{x_2}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)}$$

Par suite $\boxed{S_{x_2}(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]}$

et $S_{y_2}(f) = S_{x_2}(f)\, |H(f)|^2 = S_{x_2}(f)\, M^2(f)$

$$\Rightarrow \boxed{S_{y_2}(f) = \frac{A^2}{4} M^2(f_0)\, [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]}$$

et $\boxed{R_{y_2}(\tau) = \frac{A^2}{2} M^2(f_0) \cos(2\pi f_0 \tau)}$

on retrouve la même fonction d'autocorrélation et la même densité spectrale de puissance qu'à la question 1.

b) La puissance du signal $y_2(t)$ est $\boxed{P_2 = R_{y_2}(0) = \frac{A^2}{2} M^2(f_0)}$

La méthode d'identification expliquée à la question 1) b) s'applique donc dans le cas où la sinusoïde est modélisée à l'aide d'une phase aléatoire θ.

<u>Exercice 2 : Échantillonnage</u>

1) <u>Signal échantillonné idéal</u> $\quad x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, \delta(t - kT_e) = \boxed{x(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_e)}$

<u>TF du signal échantillonné</u> $\quad X_e(f) = X(f) * TF\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_e)\right]$

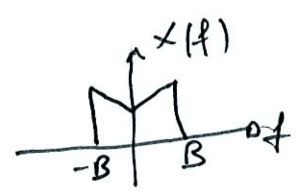
$$= X(f) * F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(f - kF_e)$$

i.e. $X_e(f) = F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f) * \delta(f-kF_e) = \boxed{F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f-kF_e)}$

2) $x_r(t)$ est le <u>signal restitué</u> défini par

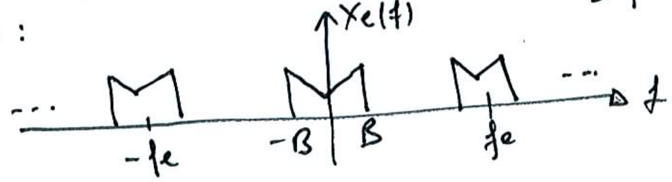
$$x_r(t) = x_e(t) * h(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, \delta(t-kT_e) * h(t)$$

d'où $\boxed{x_r(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, h(t-kT_e)}$

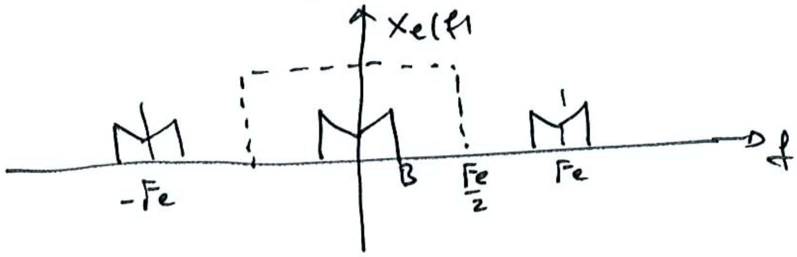


Le spectre de $x(t)$ est supposé à support borné $[-B, +B]$:

On en déduit celui de $X_e(t)$:



On retrouve une propriété vue en cours : le spectre du signal échantillonné est obtenu par périodisation du spectre du signal $x(t)$. Lorsque le signal $x_e(t)$ est filtré par un passe-bas idéal ne conservant que les fréquences contenues dans l'intervalle $[-\frac{Fe}{2}, \frac{Fe}{2}]$, on obtient le spectre d'ordre 0, i-e $Fe\,X(f)$:



Donc $\boxed{x_r(t) = Fe\, x(t)}$

3) on a d'après ce qui précède

$$x(t) = \frac{1}{Fe} x_r(t) = Te \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kTe)\, h(t-kTe)$$

donc $\boxed{x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(t)\, x(kTe)}$ avec $\boxed{a_k(t) = Te\; h(t-kTe)}$

qui justifie que $x(t)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire infinie des échantillons $\{x(kTe), k\in\mathbb{Z}\}$, les coefficients de cette combinaison linéaire étant $a_k(t)$.

4) On a $\quad s(t) = x(t) - u_n(t) = x(t) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k\, x(t-kTe)$

d'où $\quad \boxed{s(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\, x(t-kTe)}$

En prenant la TF de cette égalité, on obtient

$$S(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\, e^{-j2\pi f kTe}\, X(f)$$

i-e $\quad S(f) = T(f)\, X(f)$

avec $\quad \boxed{T(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\, e^{-j2\pi f kTe}}$

En utilisant le rappel, on obtient $\quad \boxed{T(f) = \left(1 - e^{-j2\pi f Te}\right)^n}$

5) la densité spectrale de puissance de $s(t)$ s'obtient à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$\Delta_s(f) = \Delta_x(f)\, |T(f)|^2$$

Mais $\quad |T(f)| = |(1 - e^{-j2\pi f Te})|^n$

$$= \Big| e^{-j\pi f Te} \underbrace{\left(e^{j\pi f Te} - e^{-j\pi f Te}\right)}_{2j\sin(\pi f Te)} \Big|^n$$

i.e $\quad |T(f)| = |2\sin(\pi f Te)|^n$

On en déduit $\quad \boxed{\Delta s(f) = \Delta x(f)\,|2\sin(\pi f Te)|^{2n}}$

Pour $fe > 6B$ on a $\quad f < B < \frac{fe}{6}$

d'où $\quad \pi f Te < \pi Te \frac{fe}{6} = \frac{\pi}{6}$

donc $\quad \sin(\pi f Te) < \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{2\sin(\pi f Te) < 1}$ $(*)$

La puissance du signal $s(t)$ est

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta s(f)\,df = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta x(f)\,|2\sin(\pi f Te)|^{2n}\,df}$$

d'après $(*)$, $\exists a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\quad 2\sin(\pi f Te) < a < 1$ d'où

$$\boxed{|P_s| < a^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta x(f)\,df}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\quad P_s \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} s(t) = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(t)$

On en conclut $\quad \boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n C_n^k \, x(t - kTe)}$ $(*)$

6) la dernière égalité $(*)$ montre qu'un signal à bande limitée $x(t)$ peut se décomposer comme une combinaison linéaire infinie de ses valeurs passées $x(t-kTe)$, $k = 1, 2, \ldots$
les coefficients de cette combinaison linéaire étant $(-1)^k C_n^k$

Exercice 3 : Filtrage Non-Linéaire

1) Un bruit est <u>blanc</u> si sa densité spectrale de puissance est constante, i.e

$$S_b(f) = \text{Cste} \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

Un bruit est <u>gaussien</u> si la loi de ses <u>amplitudes</u> est une loi de Gauss de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

2) On a

$$E[Y(t)] = E[e^a e^{bX(t)}] = \boxed{e^a e^{\frac{b^2\sigma^2}{2}}}$$

$$E[Y^2(t)] = E[e^{2a} e^{2bX(t)}] = \boxed{e^{2a} e^{2b^2\sigma^2}}$$

3) On pose $U = X(t)$ et $V = X(t-\tau)$ pour simplifier les notations. La matrice de covariance du couple (U,V) s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}\,U & \text{cov}(U,V) \\ \text{cov}(U,V) & \text{Var}\,V \end{pmatrix}$$

avec $\text{Var}\,U = \sigma^2$, $\text{Var}\,V = \sigma^2$ et $\text{cov}(U,V) = E[UV] - E[U]E[V]$

$$= E[X(t)X(t-\tau)] - E[X(t)]E[X(t-\tau)]$$

i.e $\text{cov}(U,V) = R_X(\tau)$ car $X(t)$ est de moyenne nulle

On a donc
$$\boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & \sigma^2 \end{pmatrix}}$$

On voit donc que Σ ne dépend que de σ^2 et de $R_X(\tau)$. Par suite, la densité du couple (U,V) qui s'écrit

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\,\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right]$$ ne dépend que de u,v

et de Σ, i.e <u>ne dépend que de u, v, σ^2 et $R_X(\tau)$</u>.

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ s'écrit

$$E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[e^{a+bX(t)} e^{a+bX(t-\tau)}]$$

$$= e^{2a} E[e^{bX(t)} e^{bX(t-\tau)}]$$

$$= e^{2a} \iint e^{bu} e^{bv} f(u,v)\, du\, dv$$

où $f(u,v)$ a été déterminée ci-dessus. Puisque $f(u,v)$ ne dépend que de u,v et de $\sigma^2, R_X(\tau)$, on en déduit que $E[Y(t)Y(t-\tau)]$ ne dépend que de a, b, σ^2 et de $R_X(\tau)$.

4) En appliquant le théorème de Price, on obtient

$$\frac{\partial E[y(t)y(t-\tau)]}{\partial E(x(t)x(t-\tau))} = E\left[\frac{dy(t)}{dx(t)}\frac{dy(t-\tau)}{dx(t-\tau)}\right]$$

c'est-à-dire $\quad \dfrac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[e^{a}\, b\, e^{bx(t)}\, e^{a}\, b\, e^{bx(t-\tau)}\right]$

d'où $\quad \dfrac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = b^2 \cancel{e^{2a}}\, E\left[e^{bx(t)+a}\, e^{a+bx(t-\tau)}\right]$

$$= b^2\, E(y(t)y(t-\tau)) = b^2 R_y(\tau)$$

donc $\quad \boxed{\dfrac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = b^2 R_y(\tau)}$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient

$$\ln |R_y(\tau)| = b^2 R_x(\tau) + C$$

$\Rightarrow \quad \boxed{R_y(\tau) = K \exp\left[b^2 R_x(\tau)\right]}$

Pour déterminer la constante K, il suffit de faire $\tau = 0$. On obtient alors

$$R_y(0) = E(y^2(t)) = e^{2a+2b^2\sigma^2} = K \exp[b^2\sigma^2]$$

$$\Rightarrow K = \frac{\exp(2a+2b^2\sigma^2)}{\exp(b^2\sigma^2)} = \boxed{\exp(2a+b^2\sigma^2)}$$

d'où $\quad \boxed{R_y(\tau) = \exp\left(2a + b^2\sigma^2 + b^2 R_x(\tau)\right)}$

$Y(t) = e^{a+bX(t)}$

donc $E[Y(t)Y(t-\tau)] = e^{2a} \, E[e^{b(X(t)+X(t-\tau))}]$

on pose $Z = X(t) + X(t-\tau)$ tel que $E[Z] = 0$

et $E[Z^2] = \mathrm{Var}\, Z = E[X^2(t) + 2X(t)X(t-\tau) + X^2(t-\tau)]$

$= \boxed{2\sigma^2 + 2R_X(\tau)}$

on a alors $R_Y(\tau) = e^{2a} \, E[e^{bZ}]$

$= e^{2a} \exp\left[\frac{b^2}{2}\left(2\sigma^2 + 2R_X(\tau)\right)\right]$

$$\boxed{R_Y(\tau) = e^{2a} \, e^{b^2\sigma^2 + b^2 R_X(\tau)}}$$

on retrouve le résultat précédent