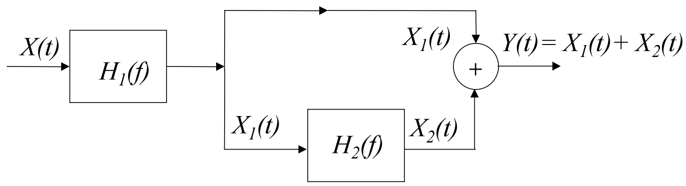
**Partiel de Théorie du Signal**

Vendredi 22 mars 2002, 10h00-12h00

*Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)*

## Exercice 1

Soit $X(t)$ un bruit blanc stationnaire de densité spectrale $s_X(f) = \frac{N_0}{2}$ attaquant le système suivant :




où $H_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |f| \in \left[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $H_2(f) = e^{-j2\pi T f}$.

1) Déterminer $X_2(t)$ en fonction de $X_1(t)$.

2) Déterminer la puissance de $Y(t)$ notée $P_Y(T)$ en fonction de la fonction d'autocorrélation de $X_1(t)$, puis en fonction de $N_0, \Delta f$ et $T$.

3) En supposant $f_0 >> \Delta f$ et en remarquant que $P_Y(T)$ a la forme d'un signal modulé en amplitude, tracer les variations de $P_Y(T)$ en fonction de $T$.

## Exercice 2

Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie qui subit une opération de filtrage linéaire par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f) = TF[h(t)]$. On note $y(t) = x(t) * h(t)$ la sortie de ce filtre et on suppose $|H(f)| \leq M, \forall f$.

1) A quelle classe de signaux appartient $y(t)$ ? (justifier votre réponse, par exemple en utilisant l'égalité de Parseval)

2) Montrer que la fonction d'intercorrélation entre deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ s'écrit

$$K_{xy}(\tau) = \int x(u)\overline{y}(u-\tau)du = x(\tau) * \widetilde{y}(\tau)$$

avec $\widetilde{y}(\tau) = \overline{y}(-\tau)$ (la notation $\overline{z}$ signifie "conjugué de $z$"). Etablir des relations similaires pour la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ et la fonction d'intercorrélation entre $y(t)$ et $x(t)$ notées respectivement $K_y(\tau)$ et $K_{yx}(\tau)$.

3) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer qu'on peut facilement retrouver les relations permettant d'obtenir $s_{yx}(f) = TF[K_{yx}(\tau)]$, $s_{xy}(f) = TF[K_{xy}(\tau)]$ et $s_y(f) = TF[K_y(\tau)]$ en fonction de $s_x(f) = TF[K_x(\tau)]$ et de $H(f)$.

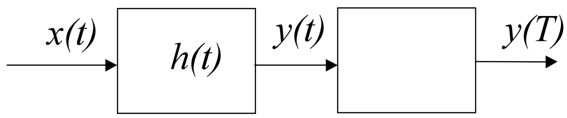
4) On considère la matrice spectrale des signaux $x(t)$ et $y(t)$ définie par

$$M(f) = \begin{pmatrix} s_x(f) & s_{xy}(f) \\ s_{yx}(f) & s_y(f) \end{pmatrix}$$

La matrice $M(f)$ est-elle inversible lorsque $y(t)$ est obtenue par filtrage linéaire de $x(t)$ ? A votre avis, quelle peut-être l'utilité d'un tel résultat ?

**Exercice 3**

Soit $s(t)$ un signal réel d'énergie finie $E$ de support l'intervalle $[0,T]$ ($s(t)=0$ si $t \notin [0,T]$) dont la transformée de Fourier est notée $S(f)$. On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)=s(T-t)$ dit "filtre adapté au signal $s(t)$". On fait suivre cette opération de filtrage par une transformation qui associe à un signal $y(t)$ sa valeur à l'instant $T$ (c'est-à-dire $y(T)$). Le système global appelé système S est représenté sur la figure ci-dessous :




1) L'opération qui au signal $y(t)$ associe $y(T)$ est-elle une opération de filtrage linéaire (invariant dans le temps) ?

2) Quelle est la sortie du système S (notée $y(T)$ sur la figure précédente) lorsque $x(t)=s(t)$ ?

3) Déterminer la puissance de $y(T)$ lorsque $x(t)=n(t)$, où $n(t)$ est un bruit réel stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale $s_n(f)=\frac{N_0}{2}$.

4) On cherche à détecter la présence du signal $s(t)$, c'est-à-dire à choisir entre les deux hypothèses $H_0$ et $H_1$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} H_0(\text{absence de signal}) &\ :\ x(t)=n(t) \\ H_1(\text{présence de signal}) &\ :\ x(t)=s(t)+n(t) \end{aligned}$$

Déterminer la moyenne et la variance de $y(T)$ sous l' hypothèse $H_0$ (i.e. en supposant que $H_0$ est vraie). Faire de même sous l'hypothèse $H_1$. En conclure que détecter la présence du signal $s(t)$ peut se ramener à comparer $y(T)$ à un seuil judicieusement choisi noté $\Lambda$.

5) En supposant que $y(T)$ est une variable aléatoire Gaussienne sous $H_0$, déterminer la probabilité de fausse alarme

$$PFA = P\left[\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}\right]$$

en fonction de $\Lambda, E$ et $N_0$ et à l'aide de la fonction $\operatorname{erfc}(x)$ définie par :

$$\operatorname{erf c}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

*Rappel* :

* la densité de la loi Normale de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$ est

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right].$$