Partiel de Théorie du Signal

Vendredi 4 avril 2003, 10h00-12h00

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1

Rappels : On rappelle que

$$\begin{aligned} TF\left[e^{-a|t|}\right] &= \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \\ TF\left[e^{-at}u(t)\right] &= \frac{1}{a+j2\pi f} \end{aligned}$$

où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside ($u(t)=1$ pour $t>0$ et $u(t)=0$ sinon).

On considère un filtre du premier ordre de fonction de transfert $H(f)=\frac{1}{a+j2\pi f}$ (avec $a>0$) attaqué par un signal $x(t)=s(t)+b(t)$, où $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire de densité spectrale $s_b(f)=2a$ et où $s(t)$ est un signal déterministe défini par

$$s(t)=\Pi_T(t)=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -\frac{T}{2}\leq t\leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera $y(t)=y_s(t)+y_b(t)$, où $y_s(t)$ et $y_b(t)$ sont les sorties du filtre lorsque les entrées sont $s(t)$ et $b(t)$.

1) Préciser les classes des signaux $s(t)$ et $b(t)$ et expliquer la terminologie bruit blanc.

2) Déterminer la puissance de $y_b(t)$.

3) Calculer l'expression de $y_s(t)$ pour toutes les valeurs de t (on pourra distinguer les trois cas $t<-\frac{T}{2}, t>\frac{T}{2}$ et $t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$).

4) On choisit d'étudier la sortie du filtre à l'instant $t=\frac{T}{2}$. Déterminer le rapport signal sur bruit instantané défini par

$$RSB=\frac{y_s^2\left(\frac{T}{2}\right)}{E\left[y_b^2(t)\right]}$$

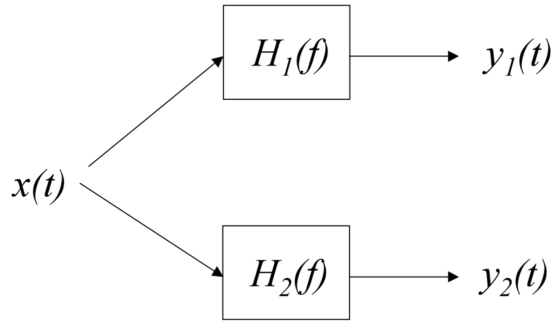
Représenter l'allure de RSB en fonction de a.

5) On cherche à échantillonner le signal $y(t)=y_s(t)+y_b(t)$. En supposant que les lobes secondaires de la transformée de Fourier de $s(t)$ peuvent être négligés devant le lobe principal, que donne la condition de Shannon pour le signal $y_s(t)$? En supposant que l'on peut négliger les fréquences associées à $y_b(t)$ telles que

$$|s_{y_b}(f)|\leq\frac{s_{y_b}(0)}{100},$$

où $s_{y_b}(f)$ est la densité spectrale de $y_b(t)$, expliciter la condition de Shannon pour le signal $y_b(t)$.

Exercice 2



Etant donner un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$, on désire retrouver la formule des interférences permettant de déterminer $E\left[y_1(t)y_2^*(t-u)\right]$. A cause d'une mauvaise connaissance du cours, on construit l'isométrie fondamentale à partir de $y_1(t)$ (et non pas à partir de $x(t)$) comme suit :

$$y_1(t) \longleftrightarrow e^{j2\pi ft}$$

1) Déterminer les correspondances de $x(t)$ puis de $y_2(t)$ par cette isométrie.
2) En déduire $E\left[y_1(t)y_2^*(t-u)\right]$ en exprimant ce produit scalaire à l'aide des correspondances obtenues à la question 1). Retrouver la formule des interférences.

Exercice 3

On considère un filtre de fonction de transfert $H(f)$ attaqué par un signal $x(t) = s(t) + ka(t)$, où k est une constante $\in \mathbb{R}$, $s(t)$ est un signal déterministe de transformée de Fourier $S(f)$ (c'est le signal utile) et $a(t)$ est un signal de brouillage également supposé déterministe de transformée de Fourier $A(f)$. On notera $y_s(t)$ et $y_a(t)$ les sorties de ce filtre lorsque les entrées sont respectivement $s(t)$ et $a(t)$.
1) Déterminer $y_s(t_0)$ et $y_a(t_0)$ sous la forme d'intégrales dépendant de $S(f), A(f)$ et $H(f)$.
2) En déduire une condition appelée condition (C) liant $A(f), H(f)$ et t_0 telle que la sortie du filtre soit indépendante du signal de brouillage. Si $H(f)$ et $A(f)$ sont à support borné, donner un cas particulier évident permettant d'obtenir cette condition.
3) Comment s'écrit la condition (C) lorsque $a(t)$ est un brouilleur sinusoidal défini par $a(t) = \cos\left(2\pi f_c t\right)$?
4) On considère maintenant que $a(t)$ est un brouilleur Gaussien, que $s(t)$ est l'un des deux signaux suivants (voir définition de $\Pi_T(t)$ à l'exercice 1) :

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ s_1(t) &= -s_0(t) \end{aligned}$$

avec $P\left[s(t) = s_0(t)\right] = P\left[s(t) = s_1(t)\right] = \frac{1}{2}$ et que la réponse impulsionnelle du filtre est $h(t) = s_0(t)$.

- Calculer les sorties du filtre correspondant aux entrées $s_0(t)$ et $s_1(t)$.
- Donner une stratégie permettant de décider à partir de la sortie du filtre lequel des deux signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ a été émis. En particulier, on précisera l'instant t où l'on doit prendre la décision.
- Quelle est la probabilité d'erreur associée à la décision précédente ?