Partiel de Théorie du Signal ($1^{ère} TR$).

Lundi 14 avril 2003, 14h00-16h00

Partiel sans documents (Une feuille A4 recto verso est autorisée)

Exercice 1

On considère un processus aléatoire réel stationnaire $X(t)$ de moyenne $m = E[X(t)]$, de fonction d'autocorrélation $K_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$ et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. On peut alors constuire le processus $Y(t)$ comme suit

$$Y(t) = \int_{t+a}^{t+b} X(u)du - \int_{t-b}^{t-a} X(u)du$$

avec $b > a > 0$.

1) Montrer que l'opération liant $X(t)$ et $Y(t)$ est une opération de filtrage linéaire (invariant dans le temps) et déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la fonction de transfert $H(f)$ du filtre.

2) Le processus $Y(t)$ est-il stationnaire ? Si oui, déterminer sa moyenne et sa densité spectrale de puissance.

3) Appliquer les résultats de 2) au cas particulier suivant :

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

où φ est une variable aléatoire uniformément répartie sur$[0, 2\pi[$.

4) On s'intéresse au cas particulier $b = a + u$, avec u "petit". Donner des expressions approchées (obtenues à l'aide de développements limités) de $H(f), h(t)$ et de $y(t)$ en fonction de $x(t)$.

5) Expliquer l'utilité pratique de la transformation liant $X(t)$ et $Y(t)$.

Exercice 2

On considère une information analogique $x(t)$ à temps continu qui subit les opérations suivantes :

- Conversion Analogique-Numérique (Echantillonnage + Quantification)
- Mise en forme
- Modulation
- Canal de transmission
- Bruit additif Gaussien
- Démodulation

- Décision
- Conversion Numérique-Analogique

Expliquer brièvement l'intérêt de chacune de ces opérations. Préciser ensuite l'effet de ces transformations sur le signal d'entrée (en d'autres termes, comment le signal ou/et son spectre sont-ils modifiés par chaque opération ?).

Exercice 3

Soit $x(t)$ un signal déterministe de transformée de Fourier $X(f)$ à support borné $[-B, +B]$. On dispose de deux suites d'échantillons de $x(t)$ prélevées chacune à une fréquence d'échantillonnage $f_e = B$ et déphasées. Cet exercice a pour but de montrer qu'il est possible de reconstituer le signal $x(t)$ à partir de ces deux suites d'échantillons (bien que la condition de Shannon ne soit pas vérifiée pour ces deux signaux).

1) Déterminer les transformées de Fourier des signaux échantillonnés

$$\begin{aligned} x_1(t) &= T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e - \theta\right) \delta\left(t - kT_e + \theta\right) \\ x_2(t) &= T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e + \theta\right) \delta\left(t - kT_e - \theta\right) \end{aligned}$$

et montrer qu'elles peuvent s'écrire toutes les deux sous la forme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k) X\left(f - kF_e\right)$ où φ est une fonction que l'on précisera pour les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

2) Si $X(f)$ est à support borné $[-B, +B]$, représenter graphiquement l'allure de $X_1(f)$ et de $X_2(f)$. Exprimer $X_1(f) = TF\left[x_1(t)\right]$ et $X_2(f) = TF\left[x_2(t)\right]$ en fonction de $X(f), X(f-B), X(f+B), \theta$ et B en distinguant les cas $f \in [0, B]$ et $f \in [-B, 0]$. Montrer alors que

$$X(f) = X_1(f)H_1(f) + X_2(f)H_2(f)$$

où $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont deux fonctions de transfert à déterminer (on utilisera la notation classique

$$\Pi_B(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad -\frac{B}{2} \leq f \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Expliquer comment on peut pratiquement reconstruire $x(t)$ à partir de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$.